CHƯƠNG 5: MÔ HÌNH BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU VÀ CÁC ỨNG DỤNG

M.Econ. Đặng Thiện Tâm

ĐỊNH HƯỚNG CHƯƠNG V

Chương V tập trung vào mô hình bài toán đối ngẫu trong quy hoạch tuyến tính - một công cụ quan trọng giúp người học hiểu sâu hơn bản chất kinh tế và quản trị của nghiệm tối ưu. Nếu bài toán gốc mô tả quyết định phân bổ nguồn lực, sản xuất, đầu tư hoặc phối hợp hoạt động để đạt một mục tiêu nhất định, thì bài toán đối ngẫu cho phép nhìn cùng vấn đề từ một góc độ khác: định giá nguồn lực, đo lường giá trị biên của các ràng buộc và kiểm tra tính tối ưu của phương án đã tìm được.

Trọng tâm của chương không chỉ là viết đúng bài toán đối ngẫu, mà còn là hiểu vì sao mỗi ràng buộc của bài toán gốc tạo ra một biến đối ngẫu, vì sao mỗi biến của bài toán gốc tạo ra một ràng buộc trong bài toán đối ngẫu, và vì sao giá trị tối ưu của hai bài toán bằng nhau khi cả hai đều có nghiệm tối ưu. Cách tiếp cận này giúp người học chuyển từ tư duy "giải bài toán" sang tư duy "diễn giải kết quả tối ưu" trong bối cảnh quản trị.

Sau khi hoàn thành chương này, người học cần có khả năng: lập bài toán đối ngẫu từ bài toán gốc ở các dạng Max/Min; nhận diện dấu của biến đối ngẫu và chiều của ràng buộc đối ngẫu; vận dụng định lý đối ngẫu yếu, định lý đối ngẫu mạnh và điều kiện độ lệch bù; đồng thời diễn giải được ý nghĩa của biến đối ngẫu như giá trị bóng của nguồn lực trong các quyết định sản xuất, tài chính, marketing và vận hành.

TÂM
GIÁ TRỊ TỪ TÂM

Bảng 5.1. Từ khóa trọng tâm của chương 5

Thuật ngữ	Ý nghĩa trong chương
Bài toán gốc (Primal)	Mô hình ban đầu mô tả quyết định cần tối ưu, thường ký hiệu là P.
Bài toán đối ngẫu (Dual)	Mô hình tương ứng với bài toán gốc, thường ký hiệu là D, dùng để phân tích giá trị của các ràng buộc và kiểm tra tối ưu.

Biến đối ngẫu	Biến gắn với mỗi ràng buộc của bài toán gốc; trong quản trị thường được hiểu là giá trị bóng của nguồn lực hoặc yêu cầu.
Giá trị bóng	Mức thay đổi biên của giá trị mục tiêu tối ưu khi vế phải của một ràng buộc thay đổi một đơn vị trong phạm vi phù hợp.
Độ lệch bù	Điều kiện liên kết giữa độ dư của một ràng buộc và giá trị của biến tương ứng trong bài toán đối ngẫu.

Hình 5.2. Quy trình tư duy khi lập và phân tích bài toán đối ngẫu

Bước	Nội dung	Ý nghĩa
1	Nhận diện bài toán gốc	Xác định mục tiêu Max/Min, biến quyết định, ràng buộc và điều kiện dấu.
2	Lập bài toán đối ngẫu	Số biến của D bằng số ràng buộc của P; số ràng buộc của D bằng số biến của P.
3	Chuyển vị ma trận hệ số	Dùng ma trận A^T để thiết lập hệ số trong các ràng buộc của bài toán đối ngẫu.
4	Kiểm tra dấu và chiều ràng buộc	Dấu của biến đối ngẫu phụ thuộc vào loại ràng buộc của P; chiều ràng buộc của D phụ thuộc vào dấu của biến trong P.
5	Diễn giải kết quả quản trị	Đọc biến đối ngẫu như giá trị bóng, nhận diện nguồn lực khan hiếm và kiểm tra tính tối ưu bằng độ lệch bù.

Ghi nhớ mở đầu

Trong quy hoạch tuyến tính, bài toán đối ngẫu không phải là một bài toán độc lập tách rời bài toán gốc. Hai bài toán tạo thành một cặp phản ánh cùng một hệ quyết định dưới hai góc nhìn: bài toán gốc lựa chọn phương án hành động, còn bài toán đối ngẫu định giá các điều kiện giới hạn của phương án đó.

Dẫn nhập

Sau khi tìm hiểu các nội dung trước đây, chúng ta nhận thấy rằng các doanh nghiệp thường xuyên phải đưa ra quyết định trong nhiều lĩnh vực khác nhau như sản xuất, tài chính, marketing, và quản lý nguồn nhân lực. Tất cả các quyết định này đều có thể được giải quyết một cách hiệu quả thông qua việc xây dựng mô hình ra quyết định, sử dụng các công cụ để tìm ra phương án tối ưu, mà nền tảng của các công cụ này chính là toán học. Từ đó, chúng ta sẽ quan tâm đến các bên liên quan đến doanh nghiệp cũng như vai trò của doanh nghiệp trong những mối quan hệ này.

Như đã biết, các đối tượng liên quan đến doanh nghiệp bao gồm nhà cung cấp, khách hàng, và đối thủ cạnh tranh. Vai trò của doanh nghiệp có thể là người bán, người mua, hoặc cũng có thể là đối thủ cạnh tranh với doanh nghiệp khác. Với các đối tượng và vai trò khác nhau, mô hình ra quyết định có thể sẽ thay đổi, tương ứng với từng tình huống cụ thể trong cùng một hệ quy chiếu. Trong thế giới toán học, chúng ta gọi các mối quan hệ này là các mô hình bài toán đối ngẫu. Việc hiểu rõ mô hình bài toán đối ngẫu là gì và cách vận dụng nó như thế nào để giúp doanh nghiệp đưa ra quyết định trong thế giới thực sẽ được trình bày chi tiết trong chương về mô hình bài toán đối ngẫu và các ứng dụng của nó.

Mục tiêu của chương

Sau khi nghiên cứu chương này, chúng ta có thể:

- Hiểu được bản chất của bài toán đối ngẫu.
- Nắm vững được các quy tắc tổng quát thiết lập bài toán đối ngẫu.
- Vận dụng thuật toán tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.
- Hiểu được ý nghĩa của bài toán đối ngẫu để có thể vận dụng được trong việc ra quyết định tốt nhất trong các tình huống từ thực tiễn.
- Nâng cao được kỹ năng tính toán trong quá trình giải quyết bài toán đối ngẫu.

5.1. Phát biểu bài toán đối ngẫu

Hộp 5.1 - Bản chất của bài toán đối ngẫu

Bản chất của bài toán đối ngẫu là chuyển góc nhìn từ “nên chọn bao nhiêu biến quyết định?” sang “các nguồn lực hoặc ràng buộc trong mô hình đáng giá bao nhiêu?”. Vì vậy, nếu bài toán gốc là bài toán phân bổ nguồn lực để tối đa hóa lợi nhuận, bài toán đối ngẫu thường được hiểu là bài toán định giá tối thiểu các nguồn lực sao cho giá trị của chúng đủ bù đắp lợi nhuận do các sản phẩm tạo ra.

Về mặt toán học, ma trận ràng buộc của bài toán đối ngẫu là ma trận chuyển vị của ma trận ràng buộc trong bài toán gốc. Về mặt quản trị, điều này cho thấy mỗi hệ số kỹ thuật trong mô hình đều có hai cách đọc: một cách đọc theo sản phẩm/hoạt động và một cách đọc theo nguồn lực/ràng buộc.

Bảng 5.3. Cách đọc mối tương ứng giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu

Thành phần trong P	Thành phần tương ứng trong D	Ý nghĩa quản trị
Một biến xj của P	Một ràng buộc thứ j của D	Mỗi hoạt động trong bài toán gốc phải được "định giá" hợp lý trong bài toán đối ngẫu.
Một ràng buộc thứ i của P	Một biến yi của D	Mỗi nguồn lực, yêu cầu hoặc giới hạn trong bài toán gốc có một giá trị biên tương ứng.
Hệ số mục tiêu cj của P	Vế phải của ràng buộc j trong D	Lợi ích hoặc chi phí đơn vị của hoạt động trở thành chuẩn so sánh trong bài toán đối ngẫu.
Vế phải bi của P	Hệ số mục tiêu của yi trong D	Quy mô nguồn lực hoặc yêu cầu trở thành trọng số trong tổng giá trị đối ngẫu.

Tương ứng với mỗi bài toán quy hoạch tuyến tính (BTQHTT) (còn gọi là bài toán gốc) có một bài toán đối ngẫu. Bài toán đối ngẫu của BTQHTT cũng là một BTQHTT. Như vậy, bài toán gốc (BTG) và bài toán đối ngẫu (BTĐN) của nó lập thành một cặp BTQHTT, tính chất của bài toán này có thể được khảo sát thông qua bài toán kia. Nhiều quy trình tính toán hay phân tích được hoàn thiện khi xem xét cặp bài toán trên trong mối liên quan chặt chẽ của chúng, mang lại lợi ích trong việc giải quyết các vấn đề phát sinh từ thực tế.

5.1.1. Bài toán đối ngẫu không đối xứng

Cho bài toán gốc là bài toán min **(P_{min})** dạng chính tắc:

(1) $x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,n}$

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad \forall i = \overline{1,m}$ (5.1)

(3) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$

Khi đó bài toán đối ngẫu **(D_{max})** được định nghĩa như sau:

(1) y_i tùy ý $\forall i = \overline{1,m}$

(2) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \qquad \forall j = \overline{1,n}$ (5.2)

(3) $\phi(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$

Tổng quát: Bài toán gốc có dạng chính tắc thì cặp bài toán gốc **(P)** và bài toán đối ngẫu (**D)** được biểu diễn qua một bảng số gọi là **Sơ đồ Tucker**. Sau đây là sơ đồ của bài toán (P_{min}) và (D_{max}) (Sơ đồ Tucker của cặp bài toán thứ hai (P_{max}) và (D_{min}) viết tương tự với chú ý: thay góc Tây Nam của sơ đồ dấu ≤ bởi dấu ≥).

Bảng 5.4. Sơ đồ Tucker

$G_{min\,(max)}$ \ $Đ_{max\,(min)}$	x_1	x_2	…	x_n	=
y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
≤ (≥)	c_1	c_2	…	c_n	$f(x) \to \min\,(\max)$ \ $\varphi(y) \to \max\,(\min)$

Ví dụ 1: Viết bài toán đối ngẫu?

(1) $x_j \ge 0 \quad \forall j = \overline{1,4}$

(2)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 - x_3 + 3x_4 &= 15 \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_4 &= 18 \end{aligned}$$

(3) $f(x) = 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \to \min$

Để viết được bài toán đối ngẫu của bài toán trên, ta lập bảng đối ngẫu theo sơ đồ Tucker như sau:

G_{min} \ $Đ_{max}$	x_1	x_2	x_3	x_4	=
y_1	2	1	-2	1	10
y_2	1	0	-1	3	15
y_3	-1	0	3	-2	18
≤	3	-1	-1	2	$f(x) \rightarrow \min$ \ $\varphi(y) \rightarrow \max$

Bài toán đối ngẫu (D_{max}):

(1) y_i tùy ý, $i = \overline{1,3}$

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
2y_1 &+ y_2 - y_3 \le 3\\
y_1 &\le -1\\
-2y_1 &- y_2 + 3y_3 \le -1\\
y_1 &+ 3y_2 - 2y_3 \le 2
\end{aligned}
$$

$$(3)\ \phi(y) = 10y_1 + 15y_2 + 18y_3 \rightarrow \max$$

5.1.2. Bài toán đối ngẫu đối xứng

5.1.2.1. Cách xây dựng bài toán đối ngẫu

Hộp 5.2 - Quy tắc đọc nhanh khi thiết lập bài toán đối ngẫu

Khi lập bài toán đối ngẫu, người học nên thực hiện theo bốn bước: (1) xác định bài toán gốc là Max hay Min; (2) xác định số biến đối ngẫu bằng số ràng buộc chính của bài toán gốc; (3) chuyển ma trận hệ số A thành ma trận chuyển vị A^T; (4) xác định dấu của biến đối ngẫu và chiều của ràng buộc đối ngẫu dựa trên loại ràng buộc và dấu của biến trong bài toán gốc.

Một sai sót thường gặp là chỉ chuyển vị ma trận nhưng quên kiểm tra dấu của biến hoặc loại ràng buộc. Trong bài toán đối ngẫu, dấu của biến và chiều bất đẳng thức mang ý nghĩa rất quan trọng vì chúng quyết định miền nghiệm khả thi của bài toán đối ngẫu.

Bảng 5.5. Gợi ý kiểm tra dấu khi lập bài toán đối ngẫu

Tình huống thường gặp	Cách xử lý khi lập đối ngẫu

P là Max, ràng buộc của P dạng ≤	Biến đối ngẫu y ≥ 0
P là Max, ràng buộc của P dạng ≥	Biến đối ngẫu y ≤ 0
P là Max, ràng buộc của P dạng =	Biến đối ngẫu y tùy ý
Biến xj của P có xj ≥ 0	Ràng buộc j của D thường có chiều ≥ trong bài toán Dmin
Biến xj của P là tùy ý	Ràng buộc j của D là dấu =

Lưu ý chuẩn hóa thuật ngữ

Trong một số tài liệu, sơ đồ dùng để lập bài toán đối ngẫu được gọi là sơ đồ Tucker/Tucker. Khi biên soạn giáo trình, nên sử dụng thống nhất một cách viết trong toàn chương và giải thích rõ đây là bảng hỗ trợ chuyển đổi giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu.

Gọi bài toán quy hoạch tuyến tính ban đầu là P và bài toán đối ngẫu là D

Bài toán (D) được lập từ bài toán (P) theo nguyên tắc sau:

Số ẩn của bài toán (D) bằng số ràng buộc chính của bài toán (P) và số ràng buộc chính của bài toán (D) bằng số ẩn của bài toán (P).

Hệ số của ẩn y_i trong hàm mục tiêu của bài toán(D) là số hạng tự do b_i trong hệ ràng buộc chính của bài toán (P).

Các hệ số của các ẩn và hệ số tự do trong ràng buộc chính thứ j của bài toán (D) là các hệ số tương ứng của ẩn xj trong hệ ràng buộc chính và hàm mục tiêu của bài toán (P).

Nếu (P) là bài toán max thì (D) là bài toán min và hệ ràng buộc chính của bài toán (D) là hệ bất phương trình với dấu ≥. Nếu (P) là bài toán min thì (D) là bài toán max và hệ ràng buộc chính của bài toán (D) là hệ bất phương trình với dấu ≤ .

Các ẩn của bài toán (D) đều có dấu tùy ý.

Ma trận hệ số các ràng buộc chính của D là ma trận chuyển vị của ma trận A bài toán (P).

❖ **Xét bài toán min:**

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính có dạng:

(1) $x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,n}$

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \qquad \forall i = \overline{1,m}$ (5.3)

(3) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$

Dạng chính tắc của bài toán là:

(1) $x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,n+m}$

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \qquad \forall i = \overline{1,m}$ (5.4)

(3) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$

Bảng 5.6. Sơ đồ Tucker của G_{min}, $Đ_{max}$

$Đ_{max}$ \ G_{min}	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	=
y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	-1	0	…	0	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	-1	…	0	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	-1	b_m
≤	c_1	c_2	…	c_n	0	0	…	0	$f(x) \to \min$ \ $\varphi(y) \to \max$

Bài toán đối ngẫu (D_{max}):

(1) $y_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1,m}$

(2) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j \qquad \forall j = \overline{1,n}$ (5.5)

(3) $\phi(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$

Vậy ta có cặp bài toán đối ngẫu sau:

Bảng 5.7. Cặp bài toán đối ngẫu Pmin - Dmax

Bài toán gốc G_{min}	**Bài toán đối ngẫu $Đ_{max}$**
Ẩn thứ j: $x_j \begin{bmatrix} \geq \\ \leq \\ \text{tùy ý} \end{bmatrix} 0$	Ràng buộc thứ j: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \begin{bmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{bmatrix} c_j$
Ràng buộc thứ i: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{bmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{bmatrix} b_i$	Ẩn thứ i: $y_i \begin{bmatrix} \geq \\ \leq \\ \text{tùy ý} \end{bmatrix} 0$
Hàm mục tiêu: $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$	Hàm mục tiêu: $\varphi(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow \max$

<u>Ví dụ 1: lập bài toán đối ngẫu (D) của bài toán QHTT sau:</u>

(1) $f(x) = 10x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 - 12x_5 \rightarrow \min$

(2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 100 & (y_1) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq -20 & (y_2) \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 60 & (y_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 & (y_4) \end{cases}$

(3) $x_1 \leq 0$, x_2, $x_3 \geq 0$, x_4 và x_5 tuỳ ý

Giải:

Hàm mục tiêu D $100y_1 - 20y_2 + 60y_3 + 12y_4 \quad \rightarrow \quad$ max

Ràng buộc dấu: y_1 : Tuỳ ý, $y_2, y_3 \geq 0$, $y_4 \leq 0$

Xác định ma trận hệ số các ràng buộc A của P

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	-1	2	3	4
1	1	1	1	1
3	-2	-2	-1	1
1	0	1	0	0

Vậy ma trận chuyển vị của Ma trận A là

3	1	3	1	**10**
-1	1	-2	0	**-2**
2	1	-2	1	**4**
3	1	-1	0	**6**
4	1	1	0	**-12**
y_1	y_2	y_3	y_4	c_j

Như vậy ra có thể thiết lập các ràng buộc của bài toán D như sau:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 10 & c_1 \Longleftrightarrow x_1 \leq 0 \\ -y_1 + y_2 - 2y_3 \leq -2 & c_2 \Longleftrightarrow x_2 \geq 0 \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4 \leq 4 & c_3 \Longleftrightarrow x_3 \geq 0 \\ 3y_1 + y_2 - y_3 = 6 & c_4 \Longleftrightarrow x_4 \text{ tuỳ ý} \\ 4y_1 + y_2 + y_3 = -12 & c_5 \Longleftrightarrow x_5 \text{ tuỳ ý} \end{cases}$$

Mấu chốt là cj đi kèm với xj trong bài toán ban đầu (P)

Vậy bài toán đối ngẫu (D) của bài toán P

Hàm mục tiêu D: $100y_1 - 20y_2 + 60y_3 + 12y_4 \quad \rightarrow \quad$ **max**

Các ràng buộc dấu

DẶNG THIỆN TÂM
GIÁ TRỊ TỪ TÂM

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 10 \\ -y_1 + y_2 - 2y_3 \leq -2 \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4 \leq 4 \\ 3y_1 + y_2 - y_3 = 6 \\ 4y_1 + y_2 + y_3 = -12 \end{cases}$$

Ràng buộc dấu:

y_1 : Tuỳ ý, $y_2, y_3 \geq 0$, $y_4 \leq 0$

Xét bài toán max:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính có dạng:

(1) $x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,n}$

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \qquad \forall i = \overline{1,m}$ (5.6)

(3) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$

Phân tích tương tự ta có cặp bài toán đối ngẫu sau:

Bảng 5.8. Cặp bài toán đối ngẫu Pmax - Dmin

Bài toán gốc G_{max}	**Bài toán đối ngẫu $Đ_{min}$**
Ẩn thứ j: $x_j \begin{bmatrix} \geq \\ \leq \\ \text{tùy ý} \end{bmatrix} 0$	Ràng buộc thứ j: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \begin{bmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{bmatrix} c_j$
Ràng buộc thứ i: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{bmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{bmatrix} b_i$	Ẩn thứ i: $y_i \begin{bmatrix} \leq \\ \geq \\ \text{tùy ý} \end{bmatrix} 0$

Hàm mục tiêu: $$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$$	Hàm mục tiêu: $$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow \min$$

Ví dụ: lập bài toán đối ngẫu (D) của bài toán QHTT sau:

(1) $f(x) = x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 5x_5 + 4x_6 \rightarrow \max$

(2) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 60 & (y_1) \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \geq 46 & (y_2) \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6 \geq -10 & (y_3) \end{cases}$$

(3) $x_1 \leq 0$, $x_2, x_3, x_6 \geq 0$, x_4 và x_5 tuỳ ý

Giải:

Hàm mục tiêu D $60y_1 + 46y_2 - 10y_3 \rightarrow$ **min**

Ràng buộc dấu: y_1 : Tuỳ ý, $y_2, y_3 \leq 0$

Xác định ma trận hệ số các ràng buộc A của P

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	1	-3	2	0	0
0	0	-1	0	-1	0
- 3	2	-1	-1	-4	2

Vậy ma trận chuyển vị của Ma trận A (P) là:

2	0	-3	1
1	0	2	-3
-3	-1	-1	-4
2	0	-1	1
0	-1	-4	5
0	0	2	4

ĐẶNG THIỆN TÂM
GIÁ TRỊ TỪ TÂM

$$\begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & c_j \end{array}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 0y_2 - 3y_3 \le 1 & c_1 \text{ <-> } x_1 \le 0 \\ y_1 + 0y_2 + 2y_3 \ge -3 & c_2 \text{ <-> } x_2 \ge 0 \\ -3y_1 - y_2 - y_3 \ge -4 & c_3 \text{ <-> } x_3 \ge 0 \\ 2y_1 + 0y_2 - y_3 = 1 & c_4 \text{ <-> } x_4 \text{ tuỳ ý} \\ 0y_1 - y_2 - 4y_3 = 5 & c_5 \text{ <-> } x_5 \text{ tuỳ ý} \\ 2y_3 \ge 4 & c_6 \text{ <-> } x_6 \ge 0 \end{cases}$$

Mấu chốt là cj đi kèm với xj trong bài toán ban đầu (P)

Vậy bài toán đối ngẫu (D) của bài toán P

Hàm mục tiêu D: $\phi(y) = 60y_1 + 46y_2 - 10y_3 \rightarrow$ **min**

Các ràng buộc chính:

$$\begin{cases} 2y_1 - 3y_3 \le 1 & c_1 \text{ <-> } x_1 \le 0 \\ y_1 + 2y_3 \ge -3 & c_2 \text{ <-> } x_2 \ge 0 \\ -3y_1 - y_2 - y_3 \ge -4 & c_3 \text{ <-> } x_3 \ge 0 \\ 2y_1 - y_3 = 1 & c_4 \text{ <-> } x_4 \text{ tuỳ ý} \\ -y_2 - 4y_3 = 5 & c_5 \text{ <-> } x_5 \text{ tuỳ ý} \\ 2y_3 \ge 4 & c_6 \text{ <-> } x_6 \ge 0 \end{cases}$$

Ràng buộc dấu: y_1 : Tuỳ ý, y_2, $y_3 \le 0$

5.1.2.2. Mối quan hệ giữa bài toán P và D

Ghi chú học thuật về quan hệ khả thi - tối ưu - không bị chặn

Cần phân biệt ba trạng thái: có phương án khả thi, có phương án tối ưu và hàm mục tiêu không bị chặn. Theo lý thuyết đối ngẫu chuẩn: nếu một bài toán có nghiệm tối ưu hữu hạn thì bài toán đối ngẫu cũng có nghiệm tối ưu hữu hạn và hai giá trị tối ưu bằng nhau. Nếu một bài toán không bị chặn theo hướng tối ưu thì bài toán đối ngẫu của nó không có phương án khả thi. Ngược lại, nếu một bài toán không có phương án khả thi thì bài toán kia có thể không có phương án khả thi hoặc có thể không bị chặn; không nên kết luận máy móc rằng cả hai cùng vô nghiệm trong mọi trường hợp.

Cách diễn giải quản trị: một mô hình không có phương án khả thi thường cho thấy các yêu cầu đặt ra vượt quá khả năng nguồn lực hoặc có ràng buộc mâu thuẫn. Một mô hình không bị chặn thường cho thấy mô hình thiếu ràng buộc quan trọng, chẳng hạn thiếu giới hạn ngân sách, công suất, nhu cầu thị trường hoặc điều kiện vận hành.

(1) Mọi bài toán quy hoạch tuyến tính ban đầu (P) đều tồn tại bài toán quy hoạch tuyến đối ngẫu (D) tương ứng.

(2) Lấy đối ngẫu chẵn lần của bài toán đối ngẫu thì sẽ được bài toán ban đầu.

(3) Nếu bài toán P không có phương án thì bài toán D cũng không có phương án

(4) Nếu bài toán P không có phương án tối ưu thì bài toán D cũng không có phương án tối ưu.

(5) Nếu x^0 là phương án tối ưu của bài toán P , y^0 là phương án tối ưu của bài toán D thì $f(x^0) = \phi(y)$

5.2. Các định lý của cặp bài toán đối ngẫu

Hộp 5.3 - Ý nghĩa của các định lý đối ngẫu

Định lý đối ngẫu yếu cho biết mọi giá trị khả thi của bài toán đối ngẫu luôn tạo ra một cận cho giá trị của bài toán gốc. Vì vậy, đối ngẫu có thể được dùng để kiểm tra xem một phương án gốc đã gần tối ưu hay chưa.

Định lý đối ngẫu mạnh cho biết nếu cả bài toán gốc và bài toán đối ngẫu đều có nghiệm tối ưu thì giá trị tối ưu của hai bài toán bằng nhau. Đây là cơ sở để xác nhận tính tối ưu mà không nhất thiết phải tiếp tục thử nghiệm các phương án khác.

Định lý độ lệch bù cho biết một nguồn lực chỉ có giá trị bóng dương khi nó được sử dụng hết tại nghiệm tối ưu; ngược lại, nếu nguồn lực còn dư thì giá trị bóng của nó bằng 0. Đây là cầu nối quan trọng giữa thuật toán đơn hình và phân tích quản trị.

Bảng 5.9. Tóm tắt ý nghĩa các định lý đối ngẫu

Khái niệm	Nội dung cốt lõi	Ý nghĩa quản trị
Đối ngẫu yếu	$f(x) \geq \varphi(y)$ đối với cặp Gmin - Đmax	Giúp tạo cận và kiểm tra tính hợp lý của phương án.

Đối ngẫu mạnh	Nếu có nghiệm tối ưu hữu hạn thì f* = φ*	Xác nhận tối ưu của hai bài toán từ hai góc nhìn khác nhau.
Độ lệch bù	Biến đối ngẫu và độ dư ràng buộc không thể cùng dương	Giải thích nguồn lực nào là nút thắt và nguồn lực nào còn dư.

Định lý 1: Hai cặp phương án bất kỳ x và y của cặp bài toán đối ngẫu tương ứng (G_{min}) và ($Đ_{max}$) ta luôn có: $f(x) \geq \phi(y)$.

Giải thích. Định lý đối ngẫu yếu khẳng định rằng với cặp (Gmin, Đmax), giá trị mục tiêu của một phương án khả thi bất kỳ của bài toán gốc (đang tối thiểu hóa) luôn không nhỏ hơn giá trị mục tiêu của một phương án khả thi bất kỳ của bài toán đối ngẫu (đang tối đa hóa). Nói cách khác, mỗi phương án đối ngẫu khả thi cho ta một cận dưới của giá trị tối thiểu cần tìm, còn mỗi phương án gốc khả thi cho một cận trên của bài toán đối ngẫu. Hệ quả thực hành: nếu tìm được hai phương án khả thi x và y sao cho $f(x) = \phi(y)$ thì cả hai chắc chắn đã tối ưu, không cần thử thêm phương án nào khác.

Định lý 2: Các cặp bài toán đối ngẫu (G) và (Đ):

Giải thích. Định lý đối ngẫu mạnh khẳng định: khi một trong hai bài toán có phương án tối ưu hữu hạn thì bài toán kia cũng có, và hai giá trị tối ưu bằng nhau ($f^* = \phi^*$); khoảng cách đối ngẫu (duality gap) bằng 0 tại nghiệm tối ưu. Về mặt quản trị, điều này nghĩa là tổng lợi nhuận tối đa mà phương án sản xuất đạt được đúng bằng tổng giá trị quy gán tối thiểu của toàn bộ nguồn lực — tức nguồn lực được "định giá" vừa đủ để giải thích toàn bộ lợi nhuận tạo ra. Phần thứ hai của định lý xử lý trường hợp suy biến: nếu hàm mục tiêu của một bài toán không bị chặn thì bài toán còn lại không có phương án khả thi nào.

− Nếu một trong hai bài toán có phương án tối ưu thì bài toán kia cũng có phương án tối ưu và khi đó giá trị cực trị (min, max) hai hàm mục tiêu của hai bài toán bằng nhau: $f_{min\,(max)} = \phi_{max\,(min)}$.

− Nếu hàm mục tiêu của một trong hai bài toán không bị chặn thì bài toán còn lại sẽ không có phương án nào. Tức là cả hai bài toán cùng vô nghiệm.

Định lý 3: Phương án $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc (P) khi và chỉ khi tồn tại một phương án $y^0 = (y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0)$ của bài toán đối ngẫu tương ứng (D) sao cho $f(x^0) = \phi(y^0)$ và khi đó ta cũng có y^0 là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (D).

Giải thích. Đây là tiêu chuẩn tối ưu dựa trên đối ngẫu: một phương án khả thi của bài toán gốc là tối ưu khi và chỉ khi tồn tại một phương án khả thi của bài toán đối ngẫu có cùng giá trị mục tiêu. Định lý này biến việc "chứng minh đã tối ưu" thành việc "chỉ ra một chứng cứ đối ngẫu" tương ứng, thay vì phải so sánh với mọi phương án khả thi khác.

Định lý 4: Định lý về độ lệch bù:

Điều kiện cần và đủ để $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc (G_{min}) và $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu ($Đ_{max}$) là:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^0 - c_j\right) x_j^0 = 0 & \forall j = \overline{1,n} \\ \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0\right) y_i^0 = 0 & \forall i = \overline{1,m} \end{cases} \qquad (5.7)$$

Chứng minh:

Vì $f(x^0) = \phi(y^0) \Rightarrow$

$$\phi(y^0) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0 - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0\right) y_i^0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 - c_j\right) x_j^0 = 0$$

$\Rightarrow$ (5.7) thỏa mãn

Hệ quả:

Xét cặp phương án tối ưu (x^0, y^0) của cặp bài toán đối ngẫu (G_{min}, $Đ_{max}$). Nếu một điều kiện ràng buộc hay điều kiện về dấu được thoả mãn không chặt (không xảy ra dấu =) trong một bài toán, thì điều kiện tương ứng trong bài toán kia phải được thoả mãn chặt (xảy ra dấu =). Tính chất này còn được gọi là tính chất độ lệch bù: Nếu trong một điều kiện xảy ra độ lệch dương thì trong điều kiện tương ứng độ lệch là bằng 0. Tức là:

$$\begin{cases} x_j^0 > 0 \text{ thì } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 = c_j \\ \left[\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 > b_i \text{ thì } y_i^0 = 0 & \text{(Với } G_{min} \text{ có hệ (2) là)} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 < b_i \text{ thì } y_i^0 = 0 & \text{(Với } G_{min} \text{ có hệ (2) là)} \end{array}\right. \end{cases}$$

ĐẶNG THIỆN TÂM
GIÁ TRỊ TỪ TÂM

$$
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l}
y_i^0 > 0 \text{ thì } \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i^0 = b_i \quad (\text{Với } G_{min} \text{ có hệ (2) là } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i) \\
y_i^0 < 0 \text{ thì } \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i^0 = b_i \quad (\text{Với } G_{min} \text{ có hệ (2) là } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i)
\end{array}\right. \\
\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 < c_j \text{ thì } x_j^0 = 0
\end{cases}
$$

=> Định lý độ lệch bù yếu. Điều kiện cần và đủ để phương án x^0 của bài toán (P) và phương án y^0 của bài toán (D) đều là phương án tối ưu là trong các cặp ràng buộc đối ngẫu của bài toán đó: ***Nếu một ràng buộc thỏa mãn phương án với dấu bất đẳng thức thực sự thì ràng buộc còn lại phải thõa mãn phương án với dấu bằng***.

Ứng dụng. Nhờ định lý độ lệch bù yếu, khi ta biết được một phương án tối ưu của một trong hai bài toán của cặp bài toán đối ngẫu thì ta có thể tìm được tập phương án tối ưu của bài toán còn lại. Ứng dụng này thường được sử dụng trong việc giải quyết các vấn đề của bài toán QHTT.

Giải thích. Điều kiện độ lệch bù liên kết từng cặp "ràng buộc – biến" giữa hai bài toán: tại nghiệm tối ưu, trong mỗi cặp không thể đồng thời xảy ra "ràng buộc lỏng" và "biến dương". Cụ thể, nếu một ràng buộc nguồn lực của bài toán gốc còn dư (không chặt) thì biến đối ngẫu — tức giá trị bóng — tương ứng bằng 0, nghĩa là nguồn lực còn thừa không tạo thêm giá trị biên; ngược lại, nếu một biến quyết định của bài toán gốc nhận giá trị dương thì ràng buộc đối ngẫu tương ứng phải xảy ra dấu bằng. Nhờ tính chất này, khi đã biết nghiệm tối ưu của một bài toán, ta có thể suy ra nghiệm của bài toán kia (xem mục 5.3) và đồng thời nhận diện ngay nguồn lực nào đang khan hiếm.

5.3. Xác định phương án tối ưu của bài toán thông qua một phương án tối ưu đã biết trong cặp bài toán đối ngẫu

Hộp 5.4 - Quy trình tìm nghiệm đối ngẫu bằng độ lệch bù

Khi đã biết nghiệm tối ưu của bài toán gốc, có thể tìm nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu theo quy trình sau: (1) lập đầy đủ bài toán đối ngẫu; (2) xác định các cặp ràng buộc đối ngẫu tương ứng; (3) thay nghiệm tối ưu của bài toán gốc vào các ràng buộc của bài toán gốc; (4) ràng buộc nào không chặt thì biến đối ngẫu tương ứng bằng 0; (5) biến gốc nào dương thì ràng buộc đối ngẫu tương ứng phải xảy ra dấu bằng; (6) giải hệ phương trình thu được để tìm các biến đối ngẫu.

Quy trình ngược lại cũng được sử dụng khi đã biết nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu và muốn suy ra nghiệm tối ưu của bài toán gốc.

Bảng 5.10. Cách đọc điều kiện độ lệch bù

Dấu hiệu tại nghiệm tối ưu	Suy luận bằng độ lệch bù	Ý nghĩa quản trị
Ràng buộc nguồn lực còn dư	Biến đối ngẫu tương ứng bằng 0	Nguồn lực chưa dùng hết không tạo thêm giá trị biên tại nghiệm tối ưu.
Ràng buộc nguồn lực chặt	Biến đối ngẫu có thể dương, âm hoặc tùy ý tùy dạng bài toán	Nguồn lực có thể là nút thắt cần được phân tích thêm.
Biến quyết định xj > 0	Ràng buộc đối ngẫu thứ j xảy ra dấu bằng	Hoạt động được lựa chọn phải có chi phí/giá trị đối ngẫu cân bằng với hệ số mục tiêu.
Biến quyết định xj = 0	Ràng buộc đối ngẫu thứ j có thể không chặt	Hoạt động không được lựa chọn có thể kém hấp dẫn hơn so với giá trị nguồn lực cần sử dụng.

5.3.1. Phương án tối ưu bài toán đối ngẫu thông qua phương án tối ưu bài toán gốc

Xét cặp bài toán đối ngẫu (G_{min}, $Đ_{max}$):

Giả sử ta đã tìm được phương án tối ưu $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ của bài toán gốc (G_{min}). Để tìm được phương án tối ưu $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ của bài toán đối ngẫu ($Đ_{max}$) mà không giải trực tiếp từ bài toán này, ta có thể thông qua phương án tối ưu của bài toán gốc để giải quyết, bằng cách áp dụng hệ quả định lý về độ lệch bù:

$$\begin{cases} x_j^0 > 0 \text{ thì } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 = c_j \\ \left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 > b_i \text{ thì } y_i^0 = 0 \quad \text{(Với } G_{min} \text{ có hệ (2) là)} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 < b_i \text{ thì } y_i^0 = 0 \quad \text{(Với } G_{min} \text{ có hệ (2) là)} \end{array} \right. \end{cases}$$

5.3.1.1. Trường hợp bài toán gốc là Max

(1) $f(x) = \quad 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 6x_4 \rightarrow \max$

(2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 40 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 36 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 32 \end{cases}$

(3) $x_j \geq 0$ (j = 1,2,3,4)

1. Giải bài toán trên và tìm phương án tối ưu của bài toán ban đầu
2. Hãy lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

Giải:

1. Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình

a. Đưa bài toán về dạng chuẩn:

$f(x) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 6x_4 - Mx_7 - Mx_8 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 40 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_7 = 36 \end{cases}$$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_6 + x_8 = 32$

$x_j \geq 0$ ($j = \overrightarrow{1,8}$)

Giải bài toán mở rộng bằng phương pháp đơn hình

Hệ số ẩn cơ bản	**Ẩn cơ bản**	**Phương án**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**λ_i**
			2	4	6	6	0	0	
0	**x_5**	40	2	1	1	2	1	0	40/1
-M	**x_7**	36	1	2	(3)	4	0	0	36/3 *
-M	**x_8**	32	2	1	2	1	0	-1	32/2

			-3M - 2	-3M - 4	-5M - 6*	-5M-6	0	***M***	$\Delta_j \geq$ ***0***
0	x_5	28	5/3	1/3	0	2/3	1	0	140/3
6	x_3	12	1/3	2/3	1	4/3	0	0	36/3
-M	x_8	8	(4/3)	-1/3	0	-5/3	0	1	32/3 *
			-4/3M*	1/3M	6	5/3M +2	0	***M***	$\Delta_j \geq$ ***0***
0	x_5	18	0	3/4	0	11/4	1	5/4	
6	x_3	10	0	3/4	1	7/4	0	1/4	
2	x_1	6	1	-1/4	0	-5/4	0	-3/4	
		72	0	0	0	2	0	***0***	$\Delta_j \geq$ ***0***

PATU: x = (6, 0, 10, 0), f(x) = 72.

ĐẶNG THIỆN TÂM
GIÁ TRỊ TỪ TÂM

2. Bài toán đối ngẫu

a, Thiết lập bài toán đối ngẫu

Bài toán gốc (P)	Bài toán đối ngẫu (D)
Trường hợp bài toán gốc là Max	D $\phi(y) = 40y_1 + 36y_2 + 32y_3$ □ min

(1) $f(x) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 6x_4 \rightarrow \max$ (2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le 40 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 36 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 32 \end{cases}$ (3) $x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3,4)$	(2) $2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 2$ $y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 4$ $y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 6$ $2y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 6$ $y_1 \ge 0$, y_2 Tuỳ ý, $y_3 \le 0$

b, Tìm các cặp ràng buộc đối ngẫu

1	$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le 40$	$y_1 \ge 0$	
2	$x_2 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 36$	y_2 Tuỳ ý	Bỏ vì mang dấu bằng
3	$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 32$	$y_3 \le 0$	
4	$x_1 \ge 0$	$2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 2$	
5	$x_2 \ge 0$	$y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 4$	
6	$x_3 \ge 0$	$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 6$	
7	$x_4 \ge 0$	$2y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 6$	

Như vậy, ta có 6 cặp ràng buộc dấu

1	$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le 40$	$y_1 \ge 0$	
2	$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 32$	$y_3 \le 0$	
3	$x_1 \ge 0$	$2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 2$	
4	$x_2 \ge 0$	$y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 4$	
5	$x_3 \ge 0$	$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 6$	
6	$x_4 \ge 0$	$2y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 6$	

Tìm hệ phương trình tối ưu y1, y2, y3 ta sử dụng định lý độ lệch bù : trong một cặp ràng buộc mà một cái nhận dấu bất đẵng thức thì cái còn lại nhận dấu bằng.

Ta có PATU: x = (6, 0, 10, 0) = $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, thay vào các cặp ràng buộc đối ngẫu ta có

1	$2*6 + 0 + 10 + 2*0 = 22 < 40$	$y_1 = 0$	
2	$2*6 + 0 + 2*10 + 0 = 32 = 32$	$y_3 \le 0$	bỏ

ĐẶNG THIỆN TÂM
GIÁ TRỊ TỪ TÂM

3	$x_1 \geq 0$ $x_1 = 6 > 0$	$2y_1 + y_2 + 2y_3 = 2$	
4	$x_2 \geq 0$ $x_2 = 0$	$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4$	bỏ
5	$x_3 \geq 0$ $x_3 = 10$	$y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 6$	
6	$x_4 \geq 0$ $x_4 = 0$	$2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 6$	bỏ

Vậy ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 2 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 6 \\ y_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_2 + 2y_3 = 2 \\ 3y_2 + 2y_3 = 6 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 2 \\ y_3 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Như vậy phương án tối ưu của bài toán D y = (0, 2, 0) GTTU = $\phi(y) = 72$

5.3.1.2. Trường hợp bài toán Min

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$f(x) = 12x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 6x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 16 \\ -x_1 + x_4 \leq 30 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 36 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$ (j = 1,2,3,4)

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

Giải

a. Đưa bài toán về dạng chuẩn

$f(x) = 12x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 6x_4 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = 16 \\ -x_1 + x_4 + x_5 = 30 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_7 = 36 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$ (j = 1,2,3,4,5,6,7)

Giải bài toán mở rộng bằng phương pháp đơn hình

ĐẶNG THIỆN TÂM
GIÁ TRỊ TỪ TÂM

Hệ số ẩn cơ bản	Ẩn cơ bản	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	λ_i
			12	6	4	-6	0	
M	x_6	16	1	**(1)**	1	-2	0	16/1*
0	x_5	30	-1	0	0	1	1	
M	x_7	36	0	2	1	-2	0	36/2
			M-12	3M-6*	2M-4	-4M+6	0	$\Delta_j \leq 0$
6	x_2	16	1	1	1	-2	0	
0	x_5	30	-1	0	0	1	1	30/1
M	x_7	4	-2	0	-1	(2)	0	4/2*
			-2M - 6	0	-M + 2	2M – 6*	0	$\Delta_j \leq 0$
6	x_2	20	-1	1	0	0	0	
0	x_5	28	0	0	1/2	0	1	
-6	x_4	2	-1	0	-1/2	1	0	
		108	-12	0	-1	0	0	$\Delta_j \leq 0$

PATU: x = (0, 20, 0, 2), f(x) = 108.

b. Bài toán đối ngẫu: Thiết lập bài toán đối ngẫu

Bài toán Gốc (P)	Bài toán đối ngẫu (D)

$f(x)= 12x_1 +6x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 +x_2 +x_3 -2x_4 = 16 \\ -x_1+x_4 \leq 30 \\ 2x_2 +x_3 -2x_4 = 36 \end{cases}$ $x_j \geq 0$ ($j = 1,2,3,4$) Nghịch Thuận	(D) $\phi(y) = 16y_1 + 30y_2 + 36y_3 \to \max$ $\begin{cases} (2) \quad y_1 + -y_2 \leq 12 \\ y_1 + 2y_3 \leq 6 \\ y_1 + y_3 \leq 4 \\ -2y_1 + y_2 -2y_3 \leq -6 \end{cases}$ y_1, y_3 : Tuỳ ý, $y_2 \leq 0$

Tìm các cặp ràng buộc đối ngẫu

1	$x_1 +x_2 +x_3 - 2x_4 = 16$	y_1 : tuỳ ý	Bỏ vì mang dấu bằng
2	$x_1 + x_4 \leq 30$	$y_2 \leq 0$	
3	$2x_2 + x_3 - 2x_4 = 36$	y_3: tuỳ ý	Bỏ vì mang dấu bằng
4	$x_1 \geq 0$	$y_1 + -y_2 \leq 12$	
5	$x_2 \geq 0$	$y_1 + 2y_3 \leq 6$	
6	$x_3 \geq 0$	$y_1 + y_3 \leq 4$	
7	$x_4 \geq 0$	$-2y_1 + y_2 -2y_3 \leq -6$	

Như vậy, ta có 5 cặp ràng buộc dấu

1	$x_1+ x_4 \leq 30$	$y_2 \leq 0$	
2	$x_1 \geq 0$	$y_1 + -y_2 \leq 12$	
3	$x_2 \geq 0$	$y_1 + 2y_3 \leq 6$	
4	$x_3 \geq 0$	$y_1 + y_3 \leq 4$	
5	$x_4 \geq 0$	$-2y_1 + y_2 -2y_3 \leq -6$	

ĐẶNG THIỆN TÂM
GIÁ TRỊ TỪ TÂM

Tìm hệ phương trình tối ưu y_1, y_2, y_3 ta sử dụng định lý độ lệch bù : trong một cặp ràng buộc mà một cái nhận dấu bất đẵng thức thì cái còn lại nhận dấu bằng.

Ta có PATU: $x = (0, 20, 0, 2)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, thay vào các cặp ràng buộc đối ngẫu ta có

1	$0 + 2 \leq 30$	$y_2 = 0$	
2	$x_1 \geq 0$, $x_1 = 0 = 0$	$y_1 + -y_2 \leq 12$	Bỏ
3	$x_2 \geq 0 = 20 > 0$	$y_1 + 2y_3 = 6$	
4	$x_3 \geq 0$ $x_3 \geq 0$, $x_3 = 0 = 0$	$y_1 + y_3 \leq 4$	Bỏ
5	$x_4 \geq 0 = 2 > 0$	$-2y_1 + y_2 - 2y_3 = -6$	

ta có hệ phương trình tối ưu sau:

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_1 + 2y_3 = 6 \\ -2y_1 + y_2 - 2y_3 = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 3 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Như vậy phương án tối ưu của bài toán D $y = (0, 0, 3)$ GTTU = $\phi(y) = 108$

5.3.2. Phương án tối ưu bài toán gốc thông qua phương án tối ưu bài đối ngẫu

Xét cặp bài toán đối ngẫu (G_{min}, $Đ_{max}$):

Giả sử ta đã tìm được phương án tối ưu $y^0 = (y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0)$ của bài toán đối ngẫu ($Đ_{max}$). Để tìm được phương án tối ưu $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ của bài toán gốc (G_{min}) mà không giải trực tiếp từ bài toán này, ta có thể thông qua phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu để giải quyết, bằng cách áp dụng hệ quả định lý về độ lệch bù:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y_i^0 > 0 \text{ thì } \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_i^0 = b_i \quad (\text{Với } G_{min} \text{ có hệ (2) là } \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i) \\ y_i^0 < 0 \text{ thì } \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_i^0 = b_i \quad (\text{Với } G_{min} \text{ có hệ (2) là } \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i) \end{array}\right. \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 < c_j \text{ thì } x_j^0 = 0 \end{cases}$$

5.4. Ý nghĩa ứng dụng của bài toán đối ngẫu

Xét bài toán gốc như sau:

ĐẶNG THIỆN TÂM

(1) $x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,n}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \end{cases}$$

(3) $f(x) = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

Cần tìm các giá trị của các biến quyết định x_1, x_2, x_3 để các ràng buộc được thoả mãn và hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán này có ý nghĩa kinh tế như sau: Giả sử một xí nghiệp sản xuất ba loại sản phẩm I, II và III. Để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm I cần có 3 đơn vị nguyên liệu loại A, 2 đơn vị nguyên liệu loại B và 1 đơn vị nguyên liệu loại C. Các chỉ tiêu đó cho một đơn vị sản phẩm loại II là 4, 1 và 3. Còn cho đơn vị sản phẩm loại III là 2, 2 và 2. Lượng nguyên liệu dự trữ loại A và B hiện có là 60, 40 và 80 (đơn vị). Hãy xác định phương án sản xuất đạt lợi nhuận lớn nhất, biết lợi nhuận / đơn vị sản phẩm bán ra là 2, 4 và 3 (đơn vị tiền tệ) cho các sản phẩm loại I, II và III.

Giả sử có một khách hàng muốn mua lại các đơn vị nguyên liệu loại A, B và C. Bài toán đặt ra là cần định giá các đơn vị nguyên liệu. Rõ ràng rằng giá các nguyên liệu được quy định bởi giá trị của sản phẩm mà chúng tạo nên. Nếu các sản phẩm này mang lại lợi nhuận lớn trên thị trường thì giá ước định của các nguyên liệu này phải cao, còn nếu trái lại thì giá ước định của chúng là thấp. Mặt khác, lợi nhuận của các sản phẩm thu được trên thị trường lại phụ thuộc vào nhiều yếu tố như: giá cả các sản phẩm được bán trên thị trường (đã được thị trường chấp nhận), lượng dự trữ nguyên liệu hiện có, hệ số chi phí sản xuất …

Như vậy, giá ước định của các nguyên liệu A, B và C phụ thuộc vào:

- Hệ số hàm mục tiêu của bài toán gốc.
- Ma trận ràng buộc các hệ số chi phí sản xuất.
- Hệ số dự trữ các loại nguyên liệu.

Tuy nhiên, mối phụ thuộc đó không dễ dàng xác định được. Để giải quyết vấn đề này hoàn toàn có thể dựa vào việc phân tích bài toán đối ngẫu. Gọi y_1 là giá ước định một đơn vị nguyên liệu loại A, y_2 là giá ước định một đơn vị nguyên liệu loại B, còn y_3 là giá ước định một đơn vị nguyên liệu loại C (y_1, y_2, $y_3 \geq 0$).

Chúng ta hãy đi xét bài toán đối ngẫu:

(1) $y_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1,m}$

(2) $\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 4 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3 \end{cases}$

(3) $\phi(y) = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3 \rightarrow \min$

Thật vậy, $\phi(y) = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3$ chính là tổng chi phí phải bỏ ra nếu người khách hàng muốn mua 60 đơn vị nguyên liệu loại A, 40 đơn vị nguyên liệu loại B và 80 đơn vị nguyên liệu loại C. Tất nhiên người khách hàng muốn tổng chi phí bỏ ra càng bé càng tốt.

Xét ràng buộc thứ nhất. Vế trái là $3y_1 + 2y_2 + y_3$ chính là số tiền khách hàng phải bỏ ra để mua 3 đơn vị nguyên liệu loại A, 2 đơn vị nguyên liệu loại B và 1 đơn vị nguyên liệu loại C. Đây là số nguyên liệu cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại I. Rõ ràng rằng, người khách hàng không thể mua được số nguyên liệu này thấp hơn lợi nhuận mà một đơn vị sản phẩm loại A mang lại khi được bán ra trên thị trường (2 đơn vị tiền tệ). Điều này dẫn đến ràng buộc thứ nhất $3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2$. Tương tự chúng ta có thể lập luận được ý nghĩa kinh tế của ràng buộc thứ hai cũng như ràng buộc thứ ba của bài toán đối ngẫu.

Để thấy rõ ý nghĩa quản trị, ta giải trọn vẹn cặp bài toán trên. Giải bài toán gốc bằng phương pháp đơn hình thu được phương án sản xuất tối ưu $x^* = (0; 20/3; 50/3)$ với lợi nhuận lớn nhất $f^* = 230/3 \approx 76{,}67$ (đơn vị tiền tệ): doanh nghiệp không sản xuất sản phẩm loại I, sản xuất 20/3 đơn vị sản phẩm loại II và 50/3 đơn vị sản phẩm loại III. Tại phương án này, nguyên liệu A được dùng hết 60 đơn vị và nguyên liệu B được dùng hết 40 đơn vị, trong khi nguyên liệu C chỉ dùng $160/3 \approx 53{,}33$ đơn vị, vẫn còn dư so với mức dự trữ 80 đơn vị.

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu — chính là hệ giá ước định (giá bóng) của ba loại nguyên liệu — là $y^* = (5/6; 2/3; 0)$. Theo định lý đối ngẫu mạnh, tổng giá trị quy gán của toàn bộ nguồn lực bằng đúng lợi nhuận tối đa: $\phi(y^*) = 60\cdot(5/6) + 40\cdot(2/3) + 80\cdot 0 = 230/3 = f^*$. Ý nghĩa quản trị: thêm một đơn vị nguyên liệu A làm lợi nhuận tối ưu tăng thêm khoảng 5/6 đơn vị tiền tệ, thêm một đơn vị nguyên liệu B làm tăng khoảng 2/3 đơn vị tiền tệ. Vì nguyên liệu C còn dư tại nghiệm tối ưu nên giá bóng của nó bằng 0 — đây là biểu hiện trực tiếp của điều kiện độ lệch bù: nguồn lực chưa dùng hết không tạo thêm giá trị biên. Do đó, nếu muốn mở rộng năng lực sản xuất, doanh nghiệp nên ưu tiên đầu tư cho hai nút thắt A và B, và chỉ nên trả thêm tối đa 5/6 (với A) hoặc 2/3 (với B) đơn vị tiền tệ cho mỗi đơn vị nguyên liệu bổ sung.

5.5. Mở rộng lý thuyết và ý nghĩa quản trị của bài toán đối ngẫu

Trong quản trị, bài toán đối ngẫu đặc biệt hữu ích vì nó giúp nhà quản lý trả lời câu hỏi: “Một đơn vị nguồn lực bổ sung đáng giá bao nhiêu?” Câu trả lời này được phản ánh qua biến đối ngẫu, thường được

ĐẶNG THIỆN TÂM
GIÁ TRỊ TỪ TÂM

gọi là giá trị bóng. Nếu giá trị bóng của một nguồn lực bằng 0, việc tăng thêm nguồn lực đó trong phạm vi hiện tại sẽ không làm cải thiện giá trị mục tiêu. Nếu giá trị bóng dương trong bài toán tối đa hóa lợi nhuận, nguồn lực đó đang khan hiếm và việc bổ sung thêm có thể làm tăng lợi nhuận tối ưu trong một khoảng biến động cho phép.

Ví dụ, trong mô hình sản xuất, các ràng buộc thường là nguyên vật liệu, giờ lao động, giờ máy hoặc ngân sách. Biến đối ngẫu tương ứng cho biết mức sẵn sàng trả tối đa cho một đơn vị bổ sung của từng nguồn lực. Nhờ đó, doanh nghiệp có thể ra quyết định mua thêm nguyên liệu, thuê thêm lao động, tăng ca, thuê ngoài hoặc đầu tư thêm công suất dựa trên giá trị kinh tế biên thay vì chỉ dựa vào cảm tính.

Trong mô hình chi phí tối thiểu, các ràng buộc thường là yêu cầu tối thiểu về dinh dưỡng, chất lượng, mức phục vụ hoặc tiêu chuẩn kỹ thuật. Khi đó biến đối ngẫu có thể được hiểu là chi phí biên của việc nâng cao một yêu cầu. Nếu yêu cầu về protein trong bài toán phối trộn thực phẩm tăng thêm, biến đối ngẫu tương ứng cho biết chi phí tối thiểu có thể tăng bao nhiêu trong phạm vi phân tích phù hợp.

Một điểm cần nhấn mạnh khi vận dụng giá trị bóng là tính hiệu lực có điều kiện của nó. Giá trị bóng của một ràng buộc chỉ giữ nguyên trong một khoảng thay đổi nhất định của vế phải b_i — gọi là khoảng hiệu lực (phạm vi nhạy cảm) của ràng buộc đó. Khi vế phải thay đổi vượt ra ngoài khoảng này, cơ cấu nghiệm tối ưu thay đổi (một biến cơ bản rời khỏi cơ sở) và giá trị bóng sẽ nhận một mức mới. Do đó, kết luận "mỗi đơn vị nguồn lực bổ sung làm thay đổi giá trị mục tiêu đúng bằng giá trị bóng" chỉ đúng trong phạm vi cho phép; nhà quản trị không nên ngoại suy tuyến tính vô hạn. Đây cũng là lý do phân tích đối ngẫu luôn đi kèm phân tích độ nhạy: đối ngẫu cho biết giá trị biên của nguồn lực, còn phân tích độ nhạy cho biết khoảng mà giá trị biên đó còn hiệu lực.

Ý nghĩa quản trị cốt lõi

Bài toán gốc cho biết nên làm gì và làm bao nhiêu. Bài toán đối ngẫu cho biết vì sao phương án đó là hợp lý, nguồn lực nào đang quyết định kết quả, và tổ chức nên trả tối đa bao nhiêu để nới lỏng một ràng buộc. Vì vậy, đối ngẫu là nền tảng của phân tích nhạy cảm, phân tích giá trị nguồn lực và đánh giá chiến lược vận hành.

Bảng 5.5a. Ứng dụng quản trị của biến đối ngẫu

Bối cảnh	Ràng buộc thường gặp	Cách đọc biến đối ngẫu
Sản xuất	Giờ máy, lao động, nguyên vật liệu	Xác định nguồn lực nút thắt và mức lợi nhuận tăng thêm nếu bổ sung nguồn lực.

Marketing	Ngân sách, số lượt quảng cáo tối đa/tối thiểu	Đánh giá giá trị của việc tăng ngân sách hoặc thay đổi giới hạn truyền thông.
Tài chính	Vốn, tỷ lệ rủi ro, yêu cầu thanh khoản	Định giá giới hạn vốn và chi phí cơ hội của các ràng buộc an toàn.
Chuỗi cung ứng	Năng lực kho, năng lực vận chuyển, nhu cầu điểm đến	Xác định điểm nghẽn trong mạng lưới và ưu tiên đầu tư mở rộng.
Phối trộn	Yêu cầu chất lượng, dinh dưỡng, kỹ thuật	Đo chi phí biên khi nâng tiêu chuẩn chất lượng hoặc mức phục vụ.

5.6. Checklist kiểm tra khi lập bài toán đối ngẫu

Bảng 5.19. Checklist kiểm tra khi lập bài toán đối ngẫu

Nội dung kiểm tra	Câu hỏi cần trả lời
Xác định bài toán gốc	Đã xác định rõ P là Max hay Min chưa?
Đếm số biến đối ngẫu	Số biến y có bằng số ràng buộc chính của P không?
Đếm số ràng buộc đối ngẫu	Số ràng buộc chính của D có bằng số biến x của P không?
Chuyển vị ma trận	Các hệ số của D đã lấy đúng theo A^T chưa?
Dấu của biến y	Dấu của y đã phù hợp với dấu ràng buộc của P chưa?
Chiều ràng buộc D	Chiều bất đẳng thức trong D đã phù hợp với dấu biến x của P chưa?
Hàm mục tiêu D	Hệ số mục tiêu của D có đúng là các vế phải bi của P không?
Kiểm tra kinh tế	Biến đối ngẫu có diễn giải được như giá trị nguồn lực hoặc chi phí biên không?

TÓM TẮT VÀ GHI NHỚ CHƯƠNG 5

• Mỗi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có một bài toán đối ngẫu tương ứng; hai bài toán phản ánh cùng một vấn đề dưới hai góc nhìn khác nhau.

• Số biến của bài toán đối ngẫu bằng số ràng buộc chính của bài toán gốc; số ràng buộc chính của bài toán đối ngẫu bằng số biến của bài toán gốc.

• Ma trận hệ số của bài toán đối ngẫu là ma trận chuyển vị của ma trận hệ số trong bài toán gốc.

• Định lý đối ngẫu mạnh khẳng định rằng nếu hai bài toán có nghiệm tối ưu hữu hạn thì giá trị tối ưu của chúng bằng nhau.

• Điều kiện độ lệch bù giúp tìm nghiệm của bài toán còn lại khi đã biết nghiệm tối ưu của một bài toán, đồng thời giải thích nguồn lực nào là khan hiếm hoặc còn dư.

• Trong quản trị, biến đối ngẫu thường được diễn giải là giá trị bóng, tức là giá trị kinh tế biên của một ràng buộc hoặc một nguồn lực.

BÀI TẬP VẬN DỤNG BỔ SUNG

Bài tập bổ sung 1. Một doanh nghiệp sản xuất hai sản phẩm A và B. Mỗi sản phẩm A đem lại lợi nhuận 30, cần 2 giờ máy và 1 kg nguyên liệu. Mỗi sản phẩm B đem lại lợi nhuận 45, cần 3 giờ máy và 2 kg nguyên liệu. Doanh nghiệp có 120 giờ máy và 80 kg nguyên liệu. Hãy lập bài toán gốc, viết bài toán đối ngẫu và diễn giải ý nghĩa của từng biến đối ngẫu.

Bài tập bổ sung 2. Một công ty phối trộn thức ăn muốn tối thiểu hóa chi phí nhưng phải đảm bảo ít nhất 100 đơn vị protein và 60 đơn vị vitamin. Hãy tự thiết kế ba loại nguyên liệu với chi phí và hàm lượng dinh dưỡng khác nhau, sau đó lập bài toán gốc, bài toán đối ngẫu và giải thích ý nghĩa của giá trị bóng đối với từng yêu cầu dinh dưỡng.

Bài tập bổ sung 3. Từ một nghiệm tối ưu đã biết của bài toán gốc, hãy sử dụng điều kiện độ lệch bù để tìm nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu. Sau đó kiểm tra lại bằng cách so sánh giá trị hàm mục tiêu của hai bài toán.

Bài tập bổ sung 4. Hãy chọn một tình huống thực tế trong doanh nghiệp có thể mô hình hóa bằng quy hoạch tuyến tính. Trình bày bài toán gốc, bài toán đối ngẫu và phân tích xem biến đối ngẫu nào có ý nghĩa quản trị quan trọng nhất.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Câu 1:

Xét BTQHTT f(x) = 2x1 + 5x2 + 8x3 → max, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 6x1 + 8x2 + 4x3 \le 96 \\ 2x1 + x2 + 2x3 \le 40 \\ 5x1 + 3x2 + 2x3 \le 60 \\ x1, x2, x3 \ge 0. \end{cases}$$

a. Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình?

b. Hãy viết bài toán đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của nó?

c. Hãy phát biểu ý nghĩa kinh tế của cặp bài toán đối ngẫu?

Câu 2:

Xét BTQHTT

$f(x) = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \rightarrow \max$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

a. Viết bài toán đối ngẫu?

b. Áp dụng lý thuyết đối ngẫu, hãy chứng minh rằng $x^* = (0, 0, 16, 31, 14)$ là phương án tối ưu của BTQHTT đã cho?

Câu 3:

$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$

a. Viết bài toán đối ngẫu?

b. Cho biết bài toán gốc có phương án tối ưu là $x^* = (0, 1/2, 0, 5/2, 3/2)$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu?

Câu 4:

$f(x) = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 \geq 96 \\ 2x_1 + x_2 \geq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a. Viết bài toán đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu bằng phương pháp đơn hình?

b. Tìm phương án tối ưu của bài toán gốc thông qua phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu?

Câu 5:

$f(x) = 12x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 8x_4$ □ max

ĐẶNG THIỆN TÂM
GIÁ TRỊ TỪ TÂM

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 3500 \\ 6x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 \le 5000 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 + 3x_4 \le 2700 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 100 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad \forall j = \overline{1;4}$$

a. Liên hệ một tình huống để có được mô hình toán ở trên?

b. Viết bài toán đối ngẫu cho bài toán ở trên?

Câu 6: Giải bài toán sau đây bằng phương pháp đơn hình? Viết bài toán đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu?

$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 \rightarrow \min$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \le -3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \le -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Câu 7:Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát sau:

$f(x) = -2x_1 + 4x_2 - x_3 + 8x_4 - 2x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - x_3 + 8x_4 \ge 110 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 120 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 4x_6 \ge 90 \\ 3x_2 + x_3 - 7x_4 - 8x_5 + 2x_6 \le 220 \end{cases}$$

$x_1 \le 0$; $x_2 \ge 0$; x_3, x_4 tùy ý; x_5, $x_6 \le 0$.

a. Viết bài toán đối ngẫu cho bài toán quy hoạch tuyến tính ở trên?

b. Chuyển bài toán đối ngẫu đã thiết lập được ở câu a về dạng chính tắc sao cho tất cả các biến số đều không âm?

Câu 8:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$f(x) = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$

ĐẶNG THIỆN TÂM
GIÁ TRỊ TỪ TÂM

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 50 \\ 3x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 \leq 80 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 60 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

a. Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

b. Viết bài toán đối ngẫu? Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu thông qua phương án tối ưu của bài toán gốc đã tìm được ở câu a?

Câu 9:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 4x_1 \qquad + 2x_3 \geq 20 \\ \qquad x_2 - x_3 \leq -8 \\ x_1 - 2x_2 \qquad = -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

a. Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình? Nhận xét phương án tối ưu?

b. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho?

ĐẶNG THIỆN TÂM
GIÁ TRỊ TỪ TÂM

Câu 10:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 18 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$

a. Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

b. Viết bài toán đối ngẫu? Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu thông qua phương án tối ưu của bài toán gốc đã tìm được ở câu a? Nhận xét phương án tối ưu?

Câu 11:

Công ty thực phẩm X đã đã sử dụng ba loại thành phần A, B, C để sấy khô một loại bánh. Ba thành phần này cung cấp lượng protein và vitamin khác nhau. Biết rằng 1 thành phần A cung cấp 12 đơn vị protein và 7 đơn vị vitamin cho 1kg bánh, 1 thành phần B cung cấp 16 đơn vị protein và 3 đơn vị vitamin cho 1kg bánh, 1 thành phần C cung cấp 14 đơn vị protein và 4 đơn vị vitamin cho 1kg bánh. Chi phí thành phần A, B, C (tính trên 1 thành phần) lần lượt là 15000đ; 18000đ; 16000đ. Công ty muốn 1 kg bánh phải chứa ít nhất 120 đơn vị protein và 50 đơn vị vitamin. Hơn nữa 1 kg bánh phải có ít nhất 70 đơn vị protein từ 2 thành phần A và C. Công ty đang xem xét để tính toán trong việc sự dụng số lượng các thành phần A, B, C để sản xuất 1kg bánh sao cho tối thiểu hóa chi phí.

a. Lập mô hình bằng phương pháp bảng tính với giả định rằng mỗi biến số ra quyết định có giá trị là 3? Nhận xét phương án đã cho?

b. Lập mô hình đại số cho tình huống trên? Viết bài toán đối ngẫu?

PHẦN BÀI GIẢI MẪU

Bài giải mẫu 1:

Một công ty sản xuất 6 chủng loại sản phẩm (SP) với định mức sử dụng chi tiết nguyên vật liệu và lượng tồn kho nguyên vật liệu hiện có như sau:

Nguyên vật liệu	Định mức nguyên vật liệu						Tồn kho
	SP1	SP2	SP3	SP4	SP5	SP6	

NVLA	3	2	0	0	1	3	1000
NVLB	0	4	2	1	3	2	1200
NVLC	2	2	4	3	0	0	600
Lợi nhuận đơn vị	**2 $**	**3 $**	**3 $**	**2 $**	**5 $**	**1 $**	

Công ty dự định rằng mức sản xuất tối đa đối với SP4, SP5, SP6 lần lượt là 150, 200, 100 sản phẩm. Hơn nữa để đảm bảo tính ổn định trong sản xuất nên tổng số lượng sản xuất của hai chủng loại SP4, SP6 tối thiểu phải đảm bảo là 200 sản phẩm, tổng số lượng sản xuất của hai chủng loại SP5, SP6 tối thiểu là 220 sản phẩm.

a. Lập mô hình bằng phương pháp đại số?

b. Viết bài toán đối ngẫu cho bài toán được thiết lập từ câu a?

Bài giải:

a.

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 + x_6 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_5 + 3x_6 \leq 1000 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 1200 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 600 \\ x_4 \leq 150 \\ x_5 \leq 200 \\ x_6 \leq 100 \\ x_4 + x_6 \geq 200 \\ x_5 + x_6 \geq 220 \end{cases}$$

$x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6 \geq 0$

b.

$\phi(y)= 1000y_1 + 1200y_2 + 600y_3 + 150y_4 \quad + 200y_5 + 100y_6 + 200y_7 + 220y_8 \Rightarrow \min$

0,5

$$\begin{cases}
3y_1 & & +2y_3 & & & & & & \geq 2 \\
2y_1 & +4y_2 & +2y_3 & & & & & & \geq 3 \\
 & 2y_2 & +4y_3 & & & & & & \geq 3 \\
 & y_2 & +3y_3 & +y_4 & & & +y_7 & & \geq 2 \\
y_1 & +3y_2 & & & +y_5 & & & +y_8 & \geq 5 \\
3y_1 & +2y_2 & & & & +y_6 & +y_7 & +y_8 & \geq 1
\end{cases}$$

$y1, y2, y3, y4, y5, y6 \geq 0, y7, y8 \leq 0$

Bài giải mẫu 2:

$$f(x) = 8x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 8x_4 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases}
5x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 5000 \\
3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 6500 \\
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3300 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1000
\end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1;4}$$

a. Liên hệ một tình huống để có được mô hình toán ở trên?

b. Viết bài toán đối ngẫu cho bài toán đã cho?

c. Chứng minh phương án $y^*=(1; 0; 3/2; 0)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho?

Bài giải:

a. Bài toán tình huống trong sản xuất: 4 sản phẩm, 3 nguyên vật liệu.

b.

$\phi(y)= 5000y_1 + 6500y_2 + 3300y_3 + 1000y_4 \Rightarrow \min$

$$\begin{cases}
5y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 8 \\
2y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 5 \\
5y_1 + 6y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 8
\end{cases}$$

$$2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 \geq 8$$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$, $y_4 \leq 0$

c. $x^* = (1675/2; 0; 0; 1625/4)$ và $f_{max} = \phi_{min} = 9950$

Bài giải mẫu 3:

Công ty thực phẩm X đã đã sử dụng 3 thành phần A, B, C để sấy khô một loại bánh. Ba thành phần này cung cấp lượng protein và vitamin khác nhau. Biết rằng 1 thành phần A cung cấp 12 đơn vị protein và 7 đơn vị vitamin cho 1kg bánh, 1 thành phần B cung cấp 16 đơn vị protein và 3 đơn vị vitamin cho 1kg bánh, 1 thành phần C cung cấp 14 đơn vị protein và 4 đơn vị vitamin cho 1kg bánh. Chi phí thành phần A, B, C (tính trên 1 thành phần) lần lượt là 15000đ; 18000đ; 16000đ. Công ty muốn 1 kg bánh phải chứa ít nhất 120 đơn vị protein và 50 đơn vị vitamin. Hơn nữa 1 kg bánh phải có ít nhất 70 đơn vị protein từ 2 thành phần A và C. Công ty đang xem xét để tính toán trong việc sự dụng số lượng các thành phần A, B, C cho việc sản xuất bánh sao cho tối thiểu hóa chi phí.

a. Lập mô hình bằng phương pháp bảng tính với giả định rằng mỗi biến số ra quyết định có giá trị là 3? Nhận xét phương án đã cho?

b. Lập mô hình đại số cho tình huống trên? Viết bài toán đối ngẫu?

Bài giải:

a.

Thành phần	A	B	C				
Số lượng	3	3	3	**TỔNG**			
Chi phí/1 thành phần	15	18	16	**147**			
TIÊU CHÍ	**CÁC YẾU TỐ RÀNG BUỘC**			**TỔNG**		**GIỚI HẠN**	**C. LỆCH**
Protein	12	16	14	**126**	>=	**120**	**-6**
Vitamin	7	3	4	**42**	>=	**50**	**8**
Protein (A+C)	1	0	1	**78**	>=	**70**	**-8**

b.

Mô hình đại số có:

$f(x) = 15x_1 + 18x_2 + 16x_3 \rightarrow \min$

Ba điều kiện ràng buộc (trong đó RB3: $12x_1 + 14x_3 \geq 70$)

Bài toán đối ngẫu:

$\phi(y) = 120y_1 + 50y_2 + 70y_3 \rightarrow \max$ 0,5

Ba điều kiện ràng buộc tương ứng có dấu ràng buộc là $\leq$

Bài giải mẫu 4:

Cho bài toán LP như sau:

$$f(x) = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 7x_5 + 3x_6 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 - 4x_5 = 9 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_5 = 8 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_5 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

a. Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

b. Hãy viết bài toán đối ngẫu cho bài toán đó và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu thông qua định lý về độ lệch bù?

Bài giải:

a.

Chuyển bài toán về dạng chính tắc

Chuyển bài toán về dạng chuẩn tắc

Hệ số	ACB	PA	5	-3	2	2	7	3	M
			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
2	x4	9	2	-2	4	1	-4	0	0
M	x7	8	4	-1	-4	0	-2	0	1
3	x6	6	5	-2	1	0	-3	1	0
f(x0)=		8M + 36	4M + 14	-M -7	-4M + 9	0	-2M -24	0	0
2	x4	33/5	0	-6/5	18/5	1	-14/5	-2/5	0
M	x7	16/5	0	3/5	-24/5	0	2/5	-4/5	1
5	x1	6/5	1	-2/5	1/5	0	-3/5	1/5	0
f(x/0)=		16/5M + 96/5	0	3/5M -7/5	-24/5M + 31/5	0	2/5M -78/5	-4/5M -14/5	0
2	x4	13	0	0	-6	1	-2	-2	
-3	x2	16/3	0	1	-8	0	2/3	-4/3	
5	x1	10/3	1	0	-3	0	-1/3	-1/3	
f(x//0)=		80/3	0	0	-5	0	-44/3	-14/3	

b.

GIÁ TRỊ TỪ TÂM

$$\varphi(y) = 9y_1 + 8y_2 + 6y_3 \quad \square \quad \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 5y_3 \leq 5 \\ -2y_1 - y_2 - 2y_3 \leq -3 \\ 4y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1 \leq 2 \end{cases}$$

$$-4y_1 - 2y_2 - 3y_3 \leq 7$$

$y_3 \qquad \le 3$

y1,y2,y3 tùy ý

Theo hệ quả của định lý về độ lệch bù:

$$\begin{cases} x_1 = 10/3 > 0 \rightarrow 2y_1 + 4y_2 + 5y_3 = 5 \\ x_2 = 16/3 > 0 \rightarrow -2y_1 - y_2 - 2y_3 = -3 \\ x_4 = 13 > 0 \rightarrow y_1 = 2 \end{cases}$$

$y^* = (2; 7/3; -5/3)$

Bài giải mẫu 5:

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ -x_1 - 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 7 \\ 4x_1 + 2x_3 + 2x_4 \le 12 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad \forall j = \overline{1;5}$$

a. Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

b.Viết bài toán đối ngẫu? Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu bằng cách sử dụng hệ quả của định lý về độ lệch bù?

Bài giải:

Hệ số	ACB	PA	2	4	1	-3	3	0
			x1	x2	x3	x4	x5	x6
4	x2	3	3	1	5	4	0	0
3	x5	7	-1	0	-3	-3	1	0
0	x6	12	4	0	2	2	0	1
f(x0)=		33	7	0	10	10	0	0
-3	x4	3/4	3/4	1/4	5/4	1	0	0
3	x5	37/4	5/4	3/4	3/4	0	1	0
0	x6	21/2	5/2	-1/2	-1/2	0	0	1
f(x/0)=		51/2	-1/2	-5/2	-5/2	0	0	0

b. Bài toán đối ngẫu có y1,y2 tùy ý; y3≤0

- y1=3/2; y2=3; y3= 0

TÀI LIỆU THAM KHẢO GỢI Ý

Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., Camm, J. D., Cochran, J. J., Fry, M. J., & Ohlmann, J. W. (2019). *An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making* (15th ed.). Cengage Learning.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2021). Introduction to Operations Research (11th ed.). McGraw-Hill.

Winston, W. L. (2004). *Operations Research: Applications and Algorithms* (4th ed.). Cengage Learning.

ĐẶNG THIỆN TÂM
GIÁ TRỊ TỪ TÂM