CHƯƠNG 4: PHƯƠNG PHÁP HỮU HẠN GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

M.Econ. Đặng Thiện Tâm

ĐỊNH HƯỚNG CHƯƠNG IV

Chương IV được thiết lập theo định hướng thống nhất với các chương trước: giữ nguyên nội dung gốc, đồng thời bổ sung khung lý thuyết, bảng thuật ngữ, ghi chú giải thích và ý nghĩa quản trị để người học không chỉ thực hiện được phép tính mà còn hiểu bản chất của phương pháp hữu hạn trong giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

Trọng tâm của chương là hai nhóm năng lực: (i) chuyển đổi bài toán quy hoạch tuyến tính giữa các dạng tổng quát, chính tắc và chuẩn tắc; (ii) sử dụng phương pháp đồ thị và phương pháp đơn hình để tìm phương án tối ưu. Theo tinh thần của giáo trình Management Science, nội dung không dừng ở thao tác thuật toán mà cần gắn với khả năng đọc kết quả, nhận diện ràng buộc chặt, phát hiện mô hình vô nghiệm hoặc không bị chặn, và chuyển nghiệm toán học thành khuyến nghị quản trị.

Sau khi học xong chương này, người học cần giải thích được vì sao nghiệm tối ưu của bài toán tuyến tính thường được tìm tại điểm cực biên, vì sao thuật toán đơn hình di chuyển giữa các phương án cơ bản khả thi, và vì sao các trường hợp đặc biệt như nhiều nghiệm tối ưu, vô nghiệm hay không bị chặn có ý nghĩa quan trọng trong thực tế quản trị.

Bản chất đúng của bài toán quy hoạch tuyến tính

Bài toán quy hoạch tuyến tính không chỉ là một hệ bất phương trình để tính toán. Về bản chất, đây là mô hình ra quyết định dùng để chọn giá trị tốt nhất cho các biến quyết định trong điều kiện nguồn lực, yêu cầu kỹ thuật, thị trường hoặc chính sách bị giới hạn. Tính "tuyến tính" thể hiện ở hai điểm: hàm mục tiêu là tổng tuyến tính của các biến và mọi ràng buộc đều là quan hệ tuyến tính.

Một nghiệm tối ưu của mô hình LP chỉ có ý nghĩa trong phạm vi các giả định và dữ liệu đã đưa vào mô hình. Vì vậy, kết quả tối ưu không nên được hiểu là "tối ưu tuyệt đối ngoài đời sống", mà là "tối ưu theo mô hình, mục tiêu, ràng buộc và dữ liệu hiện có". Đây là điểm quan trọng khi diễn giải cho người học và khi ứng dụng vào quản trị.

Bảng 4.1. Giả định nền tảng của quy hoạch tuyến tính và ý nghĩa quản trị

Giả định nền tảng của LP	**Diễn giải đúng bản chất**	**Ý nghĩa quản trị**
Tính tỷ lệ	Mỗi đơn vị biến quyết định tạo ra mức đóng góp hoặc tiêu hao nguồn lực cố định.	Lợi nhuận/chi phí/nguyên liệu trên mỗi sản phẩm được xem là không đổi trong phạm vi mô hình.
Tính cộng gộp	Tổng kết quả bằng tổng đóng góp của từng biến, không có hiệu ứng tương tác phi tuyến.	Sản phẩm A và B không làm thay đổi năng suất hoặc chi phí của nhau.
Tính chia được	Biến có thể nhận giá trị thực nếu không bổ sung điều kiện nguyên.	Nếu sản phẩm, nhân viên, quảng cáo phải là số nguyên thì cần dùng quy hoạch nguyên hoặc ràng buộc Integer.
Tính chắc chắn	Các hệ số trong mô hình được xem là đã biết và ổn định.	Cần phân tích độ nhạy khi giá, chi phí, nhu cầu hoặc công suất có thể biến động.

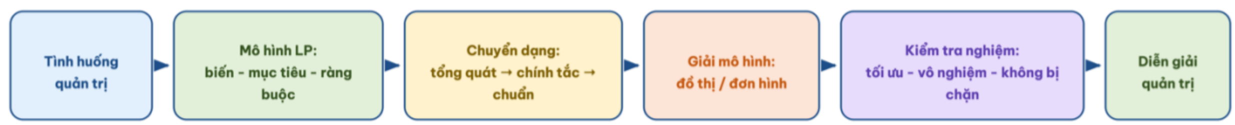
Bảng 4.2. Cấu trúc nội dung và năng lực cần đạt của chương 4

Thành phần cấu trúc	**Nội dung chính**	**Năng lực cần đạt**
Dẫn nhập và mục tiêu	Nhận diện vai trò của phương pháp đồ thị và đơn hình trong quy hoạch tuyến tính.	Hiểu mục đích học chương và bối cảnh ứng dụng.
4.1. Các dạng bài toán LP	Dạng tổng quát, chính tắc, chuẩn tắc; biến cơ bản, biến không cơ bản, phương án cơ bản.	Biết chuyển đổi mô hình để chuẩn bị giải bằng thuật toán.

4.2. Phương pháp giải	Phương pháp đồ thị, phương pháp đơn hình, đơn hình mở rộng.	Thực hiện đúng quy trình giải và kiểm tra điều kiện dừng.
4.2.3. Nhận xét nghiệm	Vô số nghiệm, nghiệm duy nhất, dấu hiệu đặc biệt trong bảng đơn hình.	Đọc được ý nghĩa toán học và quản trị của nghiệm.
Bài tập và bài giải mẫu	Rèn luyện mô hình hóa và giải thuật toán.	Tự thiết lập, giải và diễn giải kết quả.

Bảng 4.3. Từ khóa trọng tâm của chương 4

Thuật ngữ	Giải thích ngắn gọn	Ý nghĩa trong giải bài toán
Dạng tổng quát	Mô hình LP có thể gồm ràng buộc ≤, ≥, = và biến có dấu khác nhau.	Là dạng xuất phát thường gặp trong tình huống thực tế.
Dạng chính tắc	Mọi ràng buộc chính là phương trình và biến quyết định không âm.	Bước trung gian để đưa bài toán về dạng có thể lập bảng.
Dạng chuẩn tắc	Dạng chính tắc có $b \geq 0$ và ma trận ràng buộc chứa ma trận đơn vị.	Cho phép xác định phương án cơ bản xuất phát.
Biến phụ	Biến thêm vào ràng buộc ≤ để tạo phương trình.	Thể hiện phần nguồn lực còn dư.
Biến dư	Biến trừ khỏi ràng buộc ≥ để tạo phương trình.	Thể hiện mức vượt so với yêu cầu tối thiểu.
Biến giả	Biến kỹ thuật để tạo cơ sở ban đầu khi chưa có cột đơn vị.	Không có ý nghĩa quyết định thực tế; phải bằng 0 ở nghiệm của bài toán gốc.
Phương án cơ bản khả thi	Nghiệm thỏa ràng buộc và hình thành từ một hệ biến cơ bản.	Là điểm xuất phát và điểm di chuyển của thuật toán đơn hình.
Hệ số cải thiện Δj	Chỉ báo xem một biến không cơ bản có thể cải thiện hàm mục tiêu hay không.	Giúp chọn biến vào và kiểm tra tối ưu.



Hình 4.1. Quy trình tư duy khi giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Dẫn nhập

Quy hoạch tuyến tính (Linear Programming) là một kỹ thuật toán học được sử dụng để tối ưu hóa một hàm mục tiêu tuyến tính với các ràng buộc tuyến tính, có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực như kinh tế, quản lý, kỹ thuật và logistics. Quy hoạch tuyến tính bao gồm việc tìm cực trị (tối đa hoặc tối thiểu) của một hàm mục tiêu tuyến tính, với các ràng buộc là các phương trình hoặc bất phương trình tuyến tính và các biến không âm. Phương pháp đồ thị và phương pháp đơn hình là hai phương pháp cơ bản để giải các bài toán quy hoạch tuyến tính. Phương pháp đồ thị được sử dụng cho các bài toán có hai biến quyết định, bằng cách biểu diễn các ràng buộc trên mặt phẳng tọa độ, xác định miền nghiệm, tìm các điểm cực biên và đánh giá hàm mục tiêu tại các điểm này để tìm giá trị tối ưu. Trong khi đó, phương pháp đơn hình là một thuật toán lặp mạnh mẽ, có thể giải quyết các bài toán lớn và phức tạp hơn. Phương pháp này bao gồm các bước thiết lập bảng đơn hình ban đầu, xác định biến vào và biến ra, cập nhật bảng đơn hình và kiểm tra điều kiện dừng. Phương pháp đơn hình di chuyển từ điểm cực biên này đến điểm cực biên khác trên miền nghiệm cho đến khi tìm được nghiệm tối ưu. Việc hiểu và áp dụng thành thạo hai phương pháp này giúp tối ưu hóa các quyết định trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

Mục tiêu của chương

Sau khi nghiên cứu chương này, chúng ta có thể:

- Nhận dạng và thiết lập được các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính.
- Hiểu và vận dụng được phương pháp đồ thị giải bài toán quy hoạch tuyến tính.
- Nắm vững và vận dụng được các thuật toán đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính tìm phương án tối ưu.
- Tăng kỹ năng tính toán và có độ chính xác cao trong quá trình sử dụng các thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

4.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính

Bảng 4.4. Phân biệt các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính

Dạng bài toán	Dấu hiệu nhận biết	Mục đích sử dụng
Tổng quát	Có thể có ràng buộc ≤, ≥, =; biến có thể ≥0, ≤0 hoặc tự do.	Phù hợp với cách mô tả tình huống thực tế.
Chính tắc	Ràng buộc chính đều là phương trình; biến không âm.	Chuẩn hóa hệ ràng buộc để lập hệ phương trình.
Chuẩn tắc	Có $b \geq 0$ và ma trận A chứa ma trận đơn vị.	Tạo phương án cơ bản xuất phát cho bảng đơn hình.

4.1.1. Dạng tổng quát

HMT : $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} CjXj \Rightarrow Max(min)$

Các ràng buộc:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} Aij * Xj = bi & i \in I_1 \\ \sum_{j=1}^{n} Aij * Xj \leq bi & i \in I_2 \\ \sum_{j=1}^{n} Aij * Xj \geq bi & i \in I_3 \end{cases}$$

$I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \underline{1, m}$

Các ràng buộc dấu:

$X_j \geq 0$

$X_j \leq 0 \qquad \forall j = \underline{1, n}$

X_j tuỳ ý

m: số ràng buộc

n: số biến quyết định

Ví dụ 4.1

HMT: max $(6x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 5x_5)$

Các ràng buộc chính

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 \le 34 & (1) \\ 8x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 40 & (2) \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_5 \ge -36 & (3) \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 200 & (4) \end{cases}$$

Các ràng buộc dấu

$x_1, x_4 \ge 0$ J1 = (1,4)

$x_2, x_5 \le 0$ *J2 = (2,5)*

x_3 tuỳ ý *J3 = (3)*

=> Như vậy: n = 5: số biến quyết định , m = 4: số ràng buộc chính

4.1.2. Dạng chính tắc

- Tất cả các ràng buộc đều là phương trình
- các biến quyết định nhận giá trị không âm.

HMT: $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} CjXj$ ***=> Max(min)***

Các ràng buộc:

$$\sum_{j=1}^{n} Aij * Xj \; = \; bi$$

$$Với\ \forall i = \underline{1, m}$$

Các ràng buộc dấu:

(1) $x_j \ge 0\ \forall j = \underline{1, n}$

Ví dụ 4.2

HMT : Min ($6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 + 2x_5$)

CRB:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_5 = -18 \end{cases}$$

RBD: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Kí hiệu dạng ma trận

HMT: Max(min) CX

CRR: Ax = b

CRD: X ≥ 0

A = $\left(\frac{a_{11}\ a_{12} \ldots\ldots\ a_{1n}}{a_{21}\ a_{22} \ldots\ldots\ a_{2n} \ldots a_{m1}\ a_{m2} \ldots\ldots\ a_{mn}}\right)$ ma trận các hệ số các ràng buộc.

C = $(c_1, c_2 \ldots . c_n)$ vectơ hệ số trong hàm mục tiêu.

b = $\left(\frac{b1}{b2\ ..bm}\right)$ vectơ hệ số hạng tự do.

x = $\left(\frac{x1}{x2\ ..xm}\right)$ vectơ biến quyết định.

4.1.3. Dạng chuẩn tắc

Là bài toán **dạng chính tắc** có thêm điều kiện:

- Tất cả các số hạng tự do (bi) ở vé phải không âm
- Và ma trận hệ số các ràng buộc có chứa ma trận đơn vị cấp m

HMT : f(x) = $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} CjXj$ => Max(min)

CRB:

$$\begin{array}{llllllll} x_1 & & +a_{1(m+1)}x_{m+1} & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ & x_2 & +a_{2(m+1)}x_{m+1} & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \end{array}$$

…	…		…		…		
x_m	$+a_{m(m+1)}x_{m+1}$	+	…	+	$a_{mn}x_n$	=	b_m

$b_i \geq 0$ $Với\ \forall i = \underline{1, m}$

Dễ dàng viết được ma trận hệ số các ràng buộc A =

x_1	x_2	x_m	x_{m+1}		x_{m+2}		x_n		
1	0	0	$a_{1(m+1)}$	+	$a_{1(m+2)}$	+	a_{1n}	=	b_1
0	1	0	$a_{2(m+1)}$	+	$a_{2(m+2)}$	+	a_{2n}	=	b_2
		…	…		…		…		
0	0	1	$a_{m(m+1)}$	+	$a_{m(m+2)}$	+	a_{mn}	=	b_m

E_m : ma trận đơn vị cấp m

Có 3 vectơ cột đơn vị : x_1 , x_2, x_m

Trong ma trận A chứa một **ma trận đơn vị** - là trận hình vuông mà trong đó tất cả các phần tử nằm trong đường chéo chính đều nhận giá trị là bằng 1 còn tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính nhận giá trị bằng 0.

CRD: $x_j \geq 0\ \forall j = \underline{1, n}$

Ví dụ 4.3

HMT: $f(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + x_6) \Rightarrow Max$

Các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 10 \quad (1) \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_6 = 20 \quad (2) \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 18 \quad (3) \end{cases}$$

$x_j \geq 0\ \forall j = \underline{1,6}$

Ví dụ trên đã thoả mãn điều kiện của bài toán dạng chính tắc do tất cả các ràng buộc đều là phương trình và tất cả các ràng buộc dấu không âm.

Thêm vào đó, Các hệ số tự do ở vế phải đều dương

Liệu rằng trong trong ma trận hệ số các ràng buộc có tồn tại ma trận cấp đơn vị hay không chúng ta hãy cũng phân tích.

Theo dữ liệu các ràng buộc chúng ta dễ dàng thiết lập ma trận hệ số của các ràng buộc bài toán

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	**1**	**-1**	**1**	**0**	**0**
2	**-2**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**-1**	**2**	**0**	**1**	**0**

E_m : ma trận đơn vị cấp 3

Như vậy ma trận A có chứa 1 ma trân đơn vị cấp 3 cho nên ví dụ trên là **bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn.**

Một số khái niệm

Bảng 4.5. Một số khái niệm nền tảng trong phương pháp đơn hình

Khái niệm	Ý nghĩa toán học	Ý nghĩa quản trị
Biến cơ bản	Biến nhận giá trị trong nghiệm cơ sở.	Hoạt động/nguồn lực đang được xác định trong phương án hiện tại.
Biến không cơ bản	Biến được đặt bằng 0.	Hoạt động chưa được chọn hoặc không được sử dụng trong phương án hiện tại.
Phương án cơ bản khả thi	Nghiệm cơ sở thỏa x >= 0 và mọi ràng buộc.	Một kế hoạch có thể triển khai.
Phương án tối ưu	Phương án khả thi có giá trị mục tiêu tốt nhất.	Kế hoạch được khuyến nghị theo tiêu chí đã chọn.

- Các biến ứng với vectơ cột đơn vị trong ma trận A thì gọi là biến cơ bản (x_4, x_5 , x_6) còn các biến còn lại là không cơ bản (x_1, x_2, x_3).
- Tập hợp các giá trị của biến thoả mãn tất cả các ràng buộc của bài toán (CRB , RBD) thì gọi là một phương án.
- Một phương án mà các biến không cơ bản bằng 0 gọi là phương án cơ bản

- Một phương án cơ bản mà có đủ m thành phần dương thì gọi là phương án không suy biến (Phương án không suy biến là một phương án cơ bản trong đó tất cả các thành phần của nghiệm cơ sở (biến cơ sở) đều có giá trị dương), còn ngược lại thì gọi là phương án suy biến (Phương án suy biến là một phương án cơ bản trong đó có ít nhất một thành phần của nghiệm cơ sở bằng 0)

<u>Giải thích:</u> Giả sử chúng ta có một bài toán quy hoạch tuyến tính với hàm mục tiêu và các ràng buộc như sau:

Hàm mục tiêu: $f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 10 & (2) \\ x_j \ge 0\ \forall j = \underline{1,2} \end{cases}$$

Chúng ta chuyển bài toán về dạng phương trình bằng cách thêm các biến phụ:

- $x_1 + x_2 + s_1 = 4$ (1)
- $2x_1 + x_2 + s_2 = 10$ (2)

$s_1, s_2 \ge 0$

Bây giờ, tìm nghiệm cơ bản bằng cách đặt x_1 và x_2 lần lượt bằng 0 và giải hệ phương trình cho các biến phụ.

$s_1 = 4$, $s_2 = 6$

Đây là một phương án cơ bản, và vì cả s_1, s_2 đều dương, nên đây là **phương án cơ bản không suy biến**.

Khi $x_1 = 2$ và $x_2 = 2$

Thì $s_1 = 0$, $s_2 = 0$

Đây cũng là một phương án cơ bản, nhưng vì $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, nên đây là **phương án cơ bản suy biến**.Với một bài toán QHTT dạng chuẩn, ta sẽ chọn được phương án cơ bản ban đầu là.

$x_j = b_j$, $j = \underline{1, m}$

$x_j = 0$, $j = \underline{m+1, n}$

Vậy theo ví dụ ta có thể xác định phương án cơ bản là (0,0,0,10,18,20)

4.1.4. Chuyển dạng tổng quát về dạng chính tắc

Bảng 4.6. Quy tắc chuyển bài toán tổng quát về dạng chính tắc

Trường hợp	Phép biến đổi	Cách hiểu
a1x1 + ... + anxn ≤ b	Cộng biến phụ s ≥ 0: a1x1 + ... + anxn + s = b	s là lượng nguồn lực còn dư.
a1x1 + ... + anxn ≥ b	Trừ biến dư e ≥ 0: a1x1 + ... + anxn - e = b	e là mức vượt yêu cầu tối thiểu.
xj ≤ 0	Đặt xj = -xj' với xj' ≥ 0	Đưa biến âm về biến không âm.
xj tự do	Đặt xj = xj+ - xj- với xj+, xj- ≥ 0	Tách một biến tự do thành hiệu của hai biến không âm.

Hình 4.2. Sơ đồ chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát về dạng chính tắc

Ta có thể biến đổi bài toán dạng tổng quát về dạng chính tắc bằng các bước sau

Bước 1: Kiểm tra hệ ràng buộc chính

1) nếu có ràng buộc chính dạng $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$ thì ta **cộng** vào vế trái ràng buộc đó ẩn phụ x_{n+k} nghĩa là thay ràng buộc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$ trong bài toán bằng ràng buộc $\mathbf{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+k} = b_i}$.

2) nếu có ràng buộc chính dạng $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$ thì ta **trừ** vào vế trái ràng buộc đó ẩn phụ x_{n+k} nghĩa là thay ràng buộc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$ trong bài toán bằng ràng buộc $\mathbf{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+k} = b_i}$.

Chú ý. Các ẩn phụ là các ẩn không âm và hệ số của các ẩn phụ đó trong hàm mục tiêu là 0.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện dấu của ẩn số

1) Nếu có ẩn $x_j \le 0$ thì ta thực hiện phép đổi ẩn số $x_j = -x_j'$ **với** $x_j' \ge 0$.

2) Nếu có ẩn x_j **có dấu tùy ý** thì ta thực hiện phép đổi ẩn số $x_j = x_j' - x_j''$ **với ,** x_j' $x_j'' \ge 0$.

Chú ý. Khi tìm được PATU của bài toán dạng chính tắc ta chỉ cần tính giá trị của các ẩn ban đầu và bỏ đi các ẩn phụ thì sẽ được PATU của bài toán dạng tổng quát đã cho.

***Giải thích: x_j có dấu tùy ý**

Trong bài toán **quy hoạch tuyến tính (Linear Programming)**, **"dấu tùy ý"** (thực chất là cách viết sai chính tả hoặc phiên âm không chuẩn của "**biến tùy ý**" hay "**biến tự do**") là: Là **biến không bị ràng buộc về dấu**, tức là: Biến này **có thể nhận bất kỳ giá trị thực nào**, bao gồm **dương, âm hoặc bằng 0**.

Giả sử **x_j** là một biến **tùy ý**, ta sẽ thay nó bằng hai biến không âm:

$$\boxed{x_j = x_j^+ - x_j^-, \quad \text{với } x_j^+ \ge 0,\ x_j^- \ge 0}$$

xj+: đại diện cho phần **dương**

xj−: đại diện cho phần **âm**, nhưng luôn không âm

Do đó:

- Nếu $x_j = 4 \Rightarrow x_j^+ = 4, x_j^- = 0$
- Nếu $x_j = -3 \Rightarrow x_j^+ = 0, x_j^- = 3$
- Nếu $x_j = 0 \Rightarrow x_j^+ = x_j^- = 0$

Ví dụ 4.4

HMT: $f(x) = x_1 - 2x_2 - x_3 \Rightarrow$ Max

Các ràng buộc chính:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 5 & (1) \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 & (2) \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 \le -8 & (3) \end{cases}$$

Ràng buộc dấu

$x_j \ge 0\ \forall j = \underline{1,3}$

Ví dụ trên là ví dụ bài toán QHTT dạng tổng quát vậy làm cách nào để chuyển bài toán QHTT dạng tổng quát về dạng chính tắc

Ta thấy rằng ở ràng buộc chính số 1 và 3 đang dưới dạng bất phương trình vậy theo quy ước ở trên ta thêm vào bài toán 2 ẩn phụ đó là x_4 và x_5 với $x_4, x_5 \geq 0$ ta được:

Thêm vào bài toán ẩn phụ $x_4 \geq 0$ để bất phương trình $2x_1 - x_2 + x_3 \geq 5$ về phương trình $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5$.

Thêm vào bài toán ẩn phụ $x_5 \geq 0$ để bất phương trình $5x_1 + 4x_2 - x_3 \leq -8$ về phương trình $5x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = -8$.

Ta đưa bài toán về dạng chính tắc:

HMT: $f(x) = x_1 - 2x_2 - x_3 + 0\mathbf{x_4} + \mathbf{0x_5}$ => Max

Các ràng buộc chính:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - \mathbf{x_4} = 5 & (1) \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 & (2) \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 + \mathbf{x_5} = -8 & (3) \end{cases}$$

Ràng buộc dấu

$x_j \geq 0 \; \forall j = \underline{1,5}$

Giả sử rằng chúng ta thay đổi dữ kiện bài toán với ràng buộc dấu như sau:

$x_1 \geq 0$, $x_2 \leq 0$, x_3 tuỳ ý

Vậy chúng ta sẽ chuyển đổi bài toán QHTT sang dạng chính tắc như nào thế nào với sự thay đổi đó. Tương tự ta xử lý biến đổi các bất phương trình như trên và sau đó xử lý ràng buộc dấu x_2 và x_3.

Đổi biến $x_2 = -x_2'$ với $x_2' \geq 0$.

Đổi biến $x_3 = x_3' - x_3''$ với $x_3', x_3'' \geq 0$.

Ta thay vào ta có dạng phương trình đó dạng như sau:

HMT: $f(x) = x_1 - 2(\mathbf{-x_2'}) - (\mathbf{x_3' - x_3''})$ => Max

Các ràng buộc chính:

$$\begin{cases} 2x_1 - (-x_2') + (x_3' - x_3'') - x_4 = 5 & (1) \\ x_1 - (-x_2') + 3(x_3' - x_3'') = 10 & (2) \\ 5x_1 + 4(-x_2') - (x_3' - x_3'') + x_5 = -8 & (3) \end{cases}$$

Ràng buộc dấu:

$x_1, x_2', x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0$

Thành :

HMT: $f(x) = x_1 + 2x_2' - x_3' + x_3''$ => **Max**

Các ràng buộc chính:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2' + x_3' - x_3'' - x_4 = 5 & (1) \\ x_1 + x_2' + 3x_3' - 3x_3'' = 10 & (2) \\ 5x_1 - 4x_2' - x_3' + x_3'' + x_5 = -8 & (3) \end{cases}$$

Ràng buộc dấu:

$x_1, x_2', x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0$

⇨ **Như vậy dạng bài toán đã có dạng chính tắc**

4.1.5. Chuyển dạng chính tắc về dạng chuẩn

Bảng 4.7. Checklist chuyển bài toán chính tắc về dạng chuẩn tắc

Nội dung cần kiểm tra	Câu hỏi gợi ý
Vế phải b	Tất cả bi đã không âm chưa? Nếu bi < 0, đã đổi dấu cả hai vế chưa?
Ma trận đơn vị	Mỗi phương trình đã có một cột đơn vị làm biến cơ bản chưa?
Biến giả	Biến giả có được phạt đúng dấu trong hàm mục tiêu mở rộng không?
Kết quả cuối	Biến giả có bằng 0 ở nghiệm tối ưu hay không?

Từ bài toán dạng chính tắc ta có thể xây dựng bài toán dạng chuẩn như sau:

1) Khi gặp hệ số tự do $b_i < 0$ ta đổi dấu hai vế của ràng buộc thứ i.
2) Khi ma trận hệ số ràng buộc A không chứa đơn vị thứ k là e_k, ta đưa vào ẩn giả $x_{n+k} \geq 0$ và cộng thêm ẩn giả x_{n+k} vào vế trái phương trình ràng buộc thứ k để được phương trình ràng buộc mới : $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots.. + a_{kn}x_n + x_{n+k} \geq b_k$.
3) Hàm mục tiêu mở rộng f (x) được xây dựng từ hàm mục tiêu ban đầu như sau:

Đối với bài toán min: $f(x) = f(x) + M(\sum \text{ẩn giả})$

Đối với bài toán max: $f(x) = f(x) - M(\sum \text{ẩn giả})$

Trong đó M là đại lượng rất lớn, lớn hơn bất kì số nào cho trước.

Tiếp tục **ví dụ 4.4** ở trên, ta tiến hành chuyển bài toán từ dạng chính tắc qua bài toán Chuẩn

HMT: $f(x) = x_1 + 2x_2' - x_3' + x_3'' \Rightarrow \text{Max}$

Các ràng buộc chính:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2' + x_3' - x_3'' - x_4 = 5 & (1) \\ x_1 + x_2' + 3x_3' - 3x_3'' = 10 & (2) \\ 5x_1 - 4x_2' - x_3' + x_3'' + x_5 = -8 & (3) \end{cases}$$

Ràng buộc dấu:

$x_1, x_2', x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0$

Ta thấy rằng hệ số tự do ở ràng buộc thứ 3 trong ràng buộc chính đang nhỏ hơn 0 cho nên ta tiến hành đổi dấu 2 vế của ràng buộc ta được:

Các ràng buộc chính:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2' + x_3' - x_3'' - x_4 = 5 & (1) \\ x_1 + x_2' + 3x_3' - 3x_3'' = 10 & (2) \\ 5x_1 + 4x_2' + x_3' - x_3'' - x_5 = +8 & (3) \end{cases}$$

Từ ràng buộc chính này ta tiến hành viết ma trận hệ số các ràng buôc như sau:

x_1	x_2'	x_3'	x_3''	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
2	1	1	-1	-1	0	1	0	0
1	1	3	-3	0	0	0	1	0
5	4	-1	-1	0	-1	0	0	1

Vì A còn thiếu 3 vector cột đơn vị là e_1 và e_2 và e_3 nên bài toán chưa có dạng chuẩn. Thêm vào bài toán ba ẩn giả $x_6, x_7, x_8 \geq 0$ và xây dựng bài toán mở rộng có dạng chuẩn như sau: (vì bài toán max nên ta - ẩn giả)

$f(x) = x_1 + 2x_2' - x_3' + x_3'' - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8 \Rightarrow \text{Max}$

$2x_1 + x_2' + x_3' - x_3'' - x_4 + x_6 = 5 \quad (1)$

$x_1 + x_2' + 3x_3' - 3x_3'' + x_7 \quad = 10 \qquad (2)$

$5x_1 + 4x_2' + x_3' - x_3'' - x_5 + x_8 = 8 \qquad (3)$

$x_1, x_2', x_3', x_3'', x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$

Chú ý:

• *Ẩn phụ:* Tổng quát chuyển thành chính tắc

• *Ẩn giả:* Chính tắc chuyển thành chuẩn

4.1.6. Các dạng toán quy hoạch tuyến tính trong kinh tế

4.1.6.1 Bài toán dạng cực đại (Bài toán Max)

Giả sử công ty T.A.M muốn tối đa hóa lợi nhuận từ việc sản xuất nhiều sản phẩm khác nhau. Công ty phải tuân thủ các ràng buộc về nguyên liệu, thời gian, công suất máy móc.

Như vậy chúng ta có thể mô phỏng dạng tổng quát như sau:

Tối đa hóa tổng lợi nhuận: **Maximize f(x) =** $\sum_{j=1}^{n} PjXj$

Trong đó:

+ *Pj là lợi nhận trên mỗi đơn vị sản phẩm Xj.*
+ *Xj: Số lượng sản phẩm j sản xuất (cho j =1, 2, …, n).*
+ *n: số biến quyết định*

Ràng buộc tài nguyên:

$$\sum_{j=1}^{n} Aij * Xj \leq Ri$$

Trong đó: Aij là số đơn vị tài nguyên j cần cho mỗi đơn vị sản phẩm Xj, và Ri là tổng tài nguyên có sẵn.

Ràng buộc thời gian:

$$\sum_{j=1}^{n} Tij * Xj \leq Ti$$

Trong đó:

+ *Tij là thời gian sản xuất mỗi đơn vị của sản phẩm Xj.*

+ *Xj: là số lượng sản phẩm Xj cần sản xuất.*

+ *T là tổng thời gian sản xuất có sẵn.*

+ $Với\ \forall i = \underline{1, m}$

Ràng buộc công suất máy móc:

$$\sum_{j=1}^{n} Lij * Xj \leq Qi$$

+ *Lij là công suất máy móc yêu cầu để sản xuất mỗi đơn vị của sản phẩm Xj.*

+ *Xj: là số lượng sản phẩm Xj cần sản xuất.*

+ *L là công suất máy móc có sẵn.*

Điều kiện dấu: $x_j \geq 0\ \forall j = \underline{1, n}$

Vậy mô hình của bài toán là:

Maximize <= Z= $\sum_{i=1}^{n} PiXi$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} Aij * Xj \leq Ri \\ \sum_{j=1}^{n} Tij * Xj \leq Ti \\ \sum_{j=1}^{n} Lji * Xi \leq Qi \end{cases}$$

Điều kiện dấu: $X_j \geq 0, \forall j = \underline{1, n}$

4.1.6.2 Bài toán dạng cực tiểu (Bài toán Min)

Một công ty sản xuất các loại sản phẩm khác nhau. Mục tiêu của công ty là giảm thiểu tổng chi phí sản xuất trong khi đáp ứng các ràng buộc về nguyên liệu và công nhân.

Như vậy chúng ta có thể mô phỏng dạng tổng quát như sau:

Minimize f(x) = $\sum_{j=1}^{n} CjXj$

+ C_j là hệ số chi phí liên quan đến biến quyết định X_j.

+ X_j là biến quyết định (ví dụ: số lượng sản phẩm sản xuất, số lượng công nhân cần thiết, v.v.).

Ràng buộc nguyên liệu:

Giả sử bạn có n loại sản phẩm và M loại nguyên liệu, công thức tổng quát cho tổng lượng nguyên liệu cần thiết sẽ như sau:

$$\sum_{j=1}^{n} aij * xj = Mi$$

+ *xj là số lượng của sản phẩm j được sản xuất.*
+ *a_{ij} là lượng nguyên liệu j cần thiết để sản xuất một đơn vị sản phẩm i.*
+ *Mi là tổng lượng nguyên liệu i cần thiết cho việc sản xuất tất cả các sản phẩm.*

Ràng buộc công nhân:

Giả sử bạn có n loại sản phẩm và bạn đang tính toán tổng thời gian công nhân cần thiết cho mỗi loại sản phẩm. Công thức tổng quát cho tổng thời gian công nhân sẽ được biểu diễn như sau:

$$\sum_{j=1}^{n} bij * xj = T_j$$

+ *x_j là số lượng của sản phẩm j được sản xuất.*
+ *b_{ij} là lượng thời gian công nhân (giờ) cần thiết để sản xuất một đơn vị sản phẩm i.*
+ *T: là tổng thời gian công nhân cần thiết cho việc sản xuất tất cả các sản phẩm.*

Ràng buộc không âm:

$x_i \geq 0, \forall i = \underline{1, n}$

Vậy mô hình của bài toán là:

Minimize Z = $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} aij * xi = Mj \\ \sum_{i=1}^{n} bij * xi = Tj \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \forall j = \underline{1, n}$

Kết luận

Tổng quát: Qua hai bài toán đã xét trên ta có dạng tổng quát của bài toán quy hoạch tuyến tính như sau:

(3) f(x) = $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ **→min (max)**

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ **〈 ≤, =, ≥ 〉 b_i** $\forall i = \overline{1, m}$ **(4.3)**

(1) $x_j \geq 0$ $\forall j = \overline{1, n}$

Trong đó:

(1) là điều kiện biên, điều kiện tự do của bải toán, thông thường là điều kiện ẩn số không âm.

(2) là điều kiện ràng buộc do con người đặt ra đó là các chỉ tiêu kinh tế xã hội.

(3) là điều kiện mục tiêu (quan trong bậc nhất của bài toán), f(x) được gọi là hàm mục tiêu.

Mỗi mỗi véc tơ x thỏa mãn (1) và (2) được gọi là một phương án.

Nếu x thỏa mãn cả (1), (2), (3) thì x được gọi là nghiệm hay là phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính.

Vậy, bài toán quy hoạch tuyến tính là bài toán tìm cực trị (cực đại, cực tiểu) của hàm nhiều biến.

4.2. Các phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Bảng 4.8. So sánh các phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Phương pháp	Khi sử dụng	Ưu điểm	Hạn chế

Đồ thị	Bài toán có hai biến quyết định.	Trực quan, dễ hiểu miền nghiệm và điểm cực biên.	Không phù hợp với bài toán nhiều biến.
Đơn hình	Bài toán có nhiều biến/ràng buộc và đã đưa được về dạng chuẩn.	Có tính hệ thống, giải được bài toán lớn hơn.	Cần thao tác bảng cẩn thận; dễ sai dấu và sai chọn biến vào/ra.
Excel Solver/phần mềm	Mô hình thực tế có nhiều biến và cần tính nhanh.	Nhanh, thuận tiện, hỗ trợ báo cáo kết quả.	Người dùng vẫn phải hiểu mô hình để khai báo và diễn giải đúng.

4.2.1. Phương pháp đồ thị

Bảng 4.9. Quy trình giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp đồ thị

Bước	Việc cần làm	Lỗi thường gặp
1	Viết đúng hàm mục tiêu và ràng buộc.	Nhầm dấu ≤, ≥ hoặc nhầm đơn vị đo.
2	Vẽ từng đường ràng buộc và xác định nửa mặt phẳng phù hợp.	Chọn sai phía của miền nghiệm.
3	Tìm giao của các ràng buộc để xác định điểm cực biên.	Tính thiếu điểm giao hoặc lấy điểm ngoài miền khả thi.
4	Thay các điểm cực biên vào hàm mục tiêu.	Kết luận sai điểm tối ưu khi so sánh giá trị.
5	Diễn giải nghiệm bằng ngôn ngữ quản trị.	Chỉ ghi kết quả toán mà không nêu ý nghĩa nguồn lực.

Phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp đồ thị (Graphical Method) là một trong những cách đơn giản và trực quan nhất để tìm nghiệm tối ưu của bài toán với hai biến quyết định. Dưới đây là các bước chi tiết để giải một bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp đồ thị.

Bước 1: Định nghĩa bài toán

Xác định hàm mục tiêu: ***Maximize (hoặc Minimize)*** $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \dots c_nx_n$

Xác định các ràng buộc:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots a_{2n}x_n \leq b_1$$

…

…

…

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots a_{mn}x_n \leq b_m$$

Cùng với các ràng buộc không âm:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Bước 2: Vẽ các đường ràng buộc trên đồ thị và xác định miền chấp nhận của từng ràng buộc

Tiến hành chuyển các bất đẳng thức thành các phương trình

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots a_{2n}x_n = b_2$$

…

…

…

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots a_{mn}x_n = b_m$$

Sau đó tiến hành vẽ các đường thẳng này trên mặt phẳng toạ độ

Bước 3: Xác định miền chấp nhận của bài toán

Miền miền chấp nhận của bài toán (feasible region) là tập hợp tất cả các điểm (x_1, x_2) thỏa mãn tất cả các ràng buộc của bài toán quy hoạch tuyến tính, bao gồm các ràng buộc không âm. Đây là **vùng giao nhau** của các nửa mặt phẳng do các ràng buộc xác định.

Bước 4: Xác định các điểm cực biên (corner points)

Tìm các điểm giao nhau của các đường ràng buộc.

Xác định các điểm giao nhau của các đường ràng buộc với các trục tọa độ.

Bước 5: Xác định phương án tối ưu của bài toán

Cách 1: sử dụng toạ độ của các điểm cực biên sau đó chọn giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) trong các giá trị này, tùy thuộc vào bài toán là tối đa hóa hay tối thiểu hóa. Chú ý rằng chỉ sử dụng được khi miền chấp nhận của bài toán phải là miền đóng.

Cách 2: sử dụng đường mục tiêu đơn giản bằng phương pháp tịnh tiến.

Chú ý: Phương pháp đồ thị giúp chúng ta dễ dàng giải một bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng tổng quát. Tuy nhiên do phương pháp này sử dụng chủ yếu là vẽ hình học nên rất khó để sử dụng cho những bài toán đa biến quyết định cho nên chỉ thuận tiện để vẽ trên trục toạ độ Oxy trên mặt phẳng.

Phương pháp đồ thị có ý nghĩa minh họa và giúp hiểu bản chất vấn đề.

- ***Ví dụ 4.5***

Một công ty sản xuất hai sản phẩm: A và B. Công ty muốn tối đa hóa lợi nhuận từ việc sản xuất hai sản phẩm này. Lợi nhuận từ mỗi đơn vị sản phẩm A là 40 USD và từ mỗi đơn vị sản phẩm B là 30 USD. Công ty có những ràng buộc về thời gian sản xuất và nguyên liệu như sau: Tổng thời gian gia công không vượt quá 210 giờ. Tổng lượng nguyên liệu không vượt quá 200 kg. Công suất máy móc: 150 đơn vị máy. Sản phẩm A cần 6 giờ gia công, 4 đơn vị máy và 4 kg nguyên liệu. Sản phẩm B cần 3 giờ gia công, 2 đơn vị máy và 5 kg nguyên liệu.

Sử dụng phương pháp đồ thị hãy xác định phương án sản xuất đạt lợi nhuận lớn nhất, biết lợi nhuận / đơn vị sản phẩm bán ra là 40 và 30 (USD) cho các sản phẩm loại A và B.

Với dữ kiện bài toán trên chúng ta thật dễ dàng viết ra hàm mục tiêu và các ràng buộc của bài toán:

Bước 1: Định nghĩa bài toán

(3) $f(x) = \quad 40x_1 + 30x_2 \rightarrow \textbf{max}$

(2) $$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 150 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 210 \end{cases}$$

(1) $x_1, x_2 \geq 0.$

Bước 2: Vẽ các đường ràng buộc trên đồ thị và xác định miền chấp nhận của từng ràng buộc

Tiến hành chuyển các bất đẳng thức thành các phương trình

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 200 \\ 4x_1 + 2x_2 = 150 \\ 6x_1 + 3x_2 = 210 \end{cases}$$

Sau đó tiến hành vẽ các đường thẳng này trên mặt phẳng toạ độ

Vẽ đường thẳng $4x_1 + 5x_2 = 200$ (1)

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 40$: (0,40)

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 50$: (50,0)

Vẽ đường thẳng $4x_1 + 2x_2 = 150$ (2)

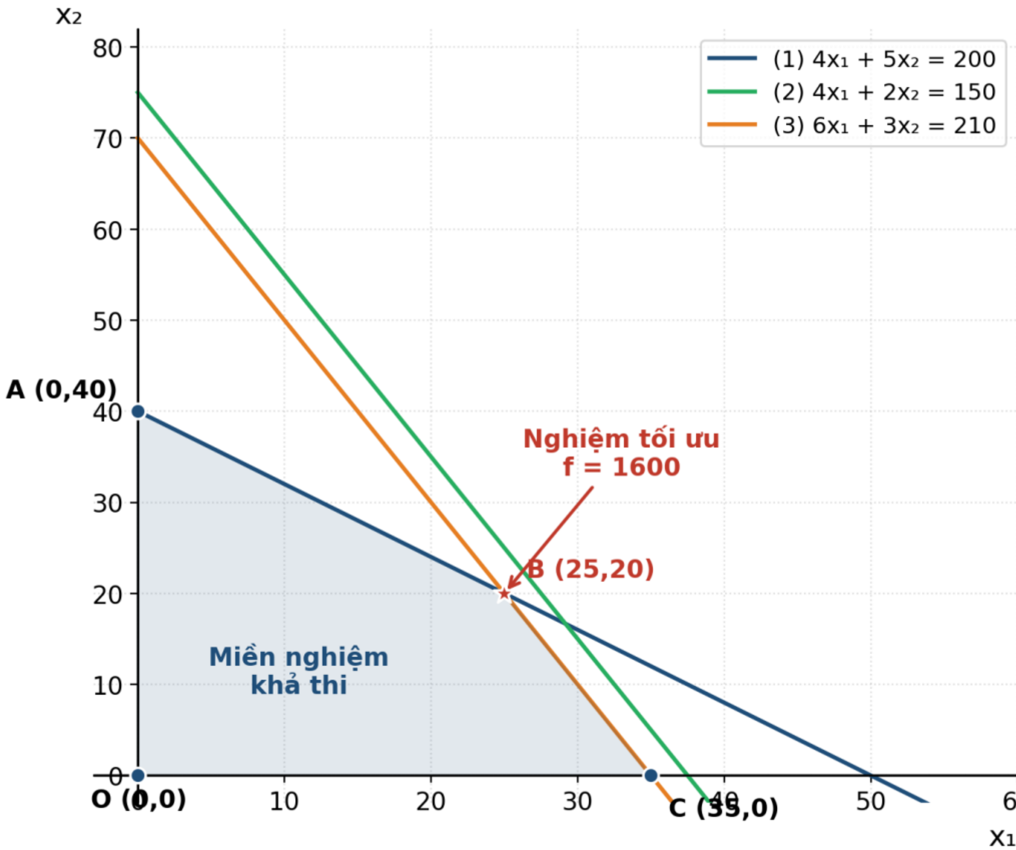
$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 75$: (0,75)

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 37.5$: (37.5,0)

Vẽ đường thẳng $6x_1 + 3x_2 = 210$ (3)

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 70$: (0,70)

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 35$: (35,0)



Hình 4.3. Miền nghiệm khả thi và nghiệm tối ưu của Ví dụ 4.5

Bước 3: Xác định miền chấp nhận của bài toán

Kết hợp tất cả các ràng buộc của bài toán chúng ta dễ dàng xác định miền chấp nhận của bài toán ở vùng **OABC**

Bước 5: Xác định phương án tối ưu của bài toán

Cách 1: sử dụng toạ độ của các điểm cực biên

$f(x) = 40x_1 + 30x_2 \rightarrow$ **max**

O (0,0): f(0) = 0

A (0,40): f(A) = 30*40 = 1200

C (35,0): f(C) = 40*35 = 1400

B là giao điểm của hai đường thẳng (1) và (3) : chúng ta tiến hành giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 200 \\ 6x_1 + 3x_2 = 210 \end{cases}$$

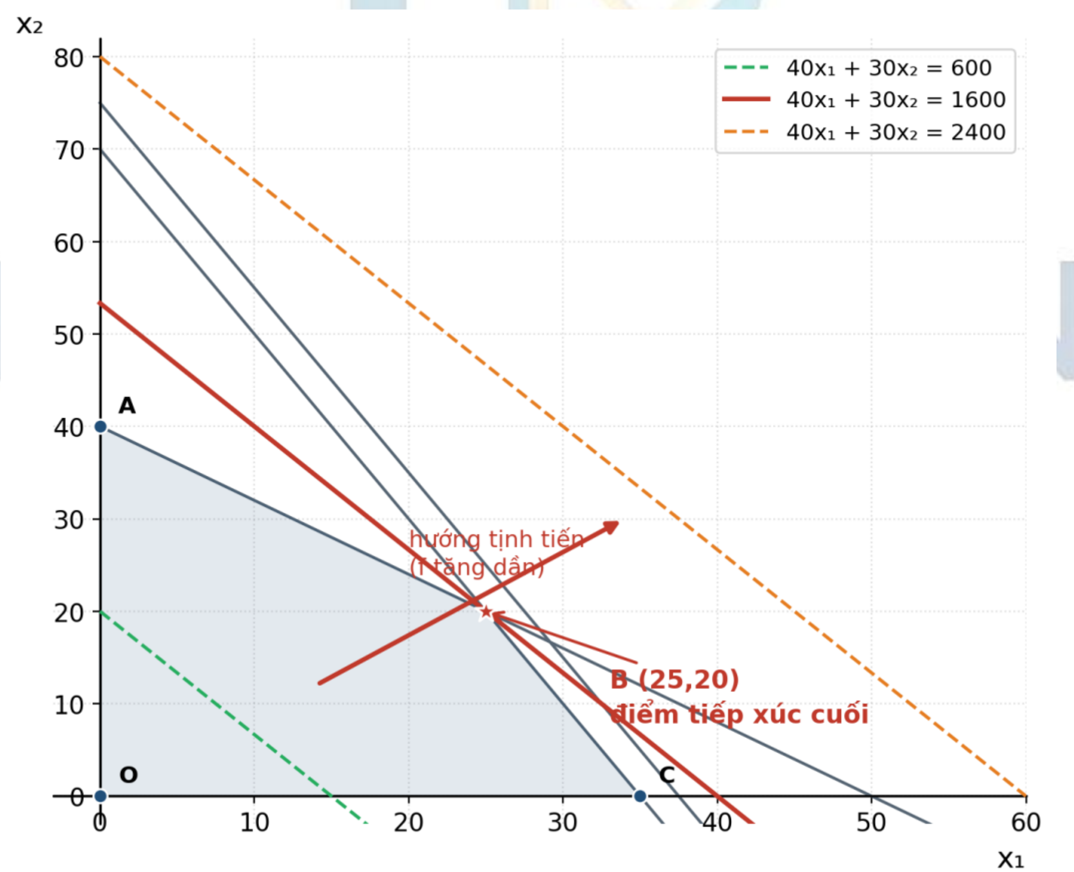
Giải hệ phương trình ta có $x_1 = 25$ và $x_2 = 20$ => B (25,20)

f(B) = 40*25 + 30*20= 1600

Có thể rằng tất cả các toạ độ của điểm cực biên O, A, B, C thì toạ độ của điểm B làm cho giá trị của hàm F(x) là lớn nhất như vậy ta có thể kết luận rằng phương án tối ưu của bài toán là tại điểm B với $x_1 = 25$ và $x_2 = 20$ và F(max) = 1600.

Đọc ràng buộc tại nghiệm tối ưu: Tại nghiệm B(25, 20), ràng buộc nguyên liệu ($4x_1 + 5x_2 = 200$) và ràng buộc thời gian gia công ($6x_1 + 3x_2 = 210$) đều đạt dấu bằng, tức là hai ràng buộc chặt — đây là các nguồn lực nút thắt. Trong khi đó ràng buộc công suất máy $4x_1 + 2x_2 = 4·25 + 2·20 = 140 < 150$, còn dư 10 đơn vị, nên là ràng buộc không chặt (dư thừa tại nghiệm này). Về quản trị, doanh nghiệp chưa cần đầu tư thêm công suất máy; muốn tăng lợi nhuận nên ưu tiên bổ sung nguyên liệu hoặc thời gian gia công.

Cách 2: sử dụng đường mục tiêu đơn giản bằng phương pháp tịnh tiến.



Hình 4.4. Tịnh tiến đường mục tiêu để xác định nghiệm tối ưu trong Ví dụ 4.5

f(x) = $40x_1 + 30x_2 \rightarrow$ **max**

+ vẽ đường mục tiêu đơn giản : $40x_1 + 30x_2 = 600$ ⇔ $\alpha 1$

(0, 20) ; (15,0)

+ vẽ đường mục tiêu đơn giản: $40x_1 + 30x_2 = 2400$ <=> $\alpha 2$

(0, 80) ; (60,0)

⇨ Các đường thẳng dạng $40x_1 + 30x_2 = \alpha$, thì sẽ song song với nhau

⇨ Chúng ta có thể thấy rằng nếu chúng ta tịnh tiến giá trị α ra xa thì giá trị sẽ được tăng lên.

Chúng ta đã xác định rằng miền chấp nhận của bài toán là OABC, cho nên những điểm ngoài miền chấp nhận này sẽ không được gọi là phương án của bài toán. Chúng ta sẽ tịnh tiến theo hướng xa gốc O đến điểm cuối cùng trong miền chấp nhận. Theo bài toán này thì điểm tiếp xúc cuối cùng của bài toán tại điểm B và chính điểm đó là phương án tối ưu của bài toán.

B là giao điểm của hai đường thẳng (1) và (3) : chúng ta tiến hành giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 200 \\ 6x_1 + 3x_2 = 210 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta có $x_1 = 25$ và $x_2 = 20$ => B (25,20)

$$f(B) = 40*25 + 30*20 = 1600$$

Chú ý: đường mục tiêu đơn giản có nhiều giá trị và chúng ta có thể lấy bất kì giá trị nào. Tôi chủ đích lấy giá trị 600 và 2400 để đưa ra x_1 và x_2 là số nguyên

4.2.2. Phương pháp đơn hình

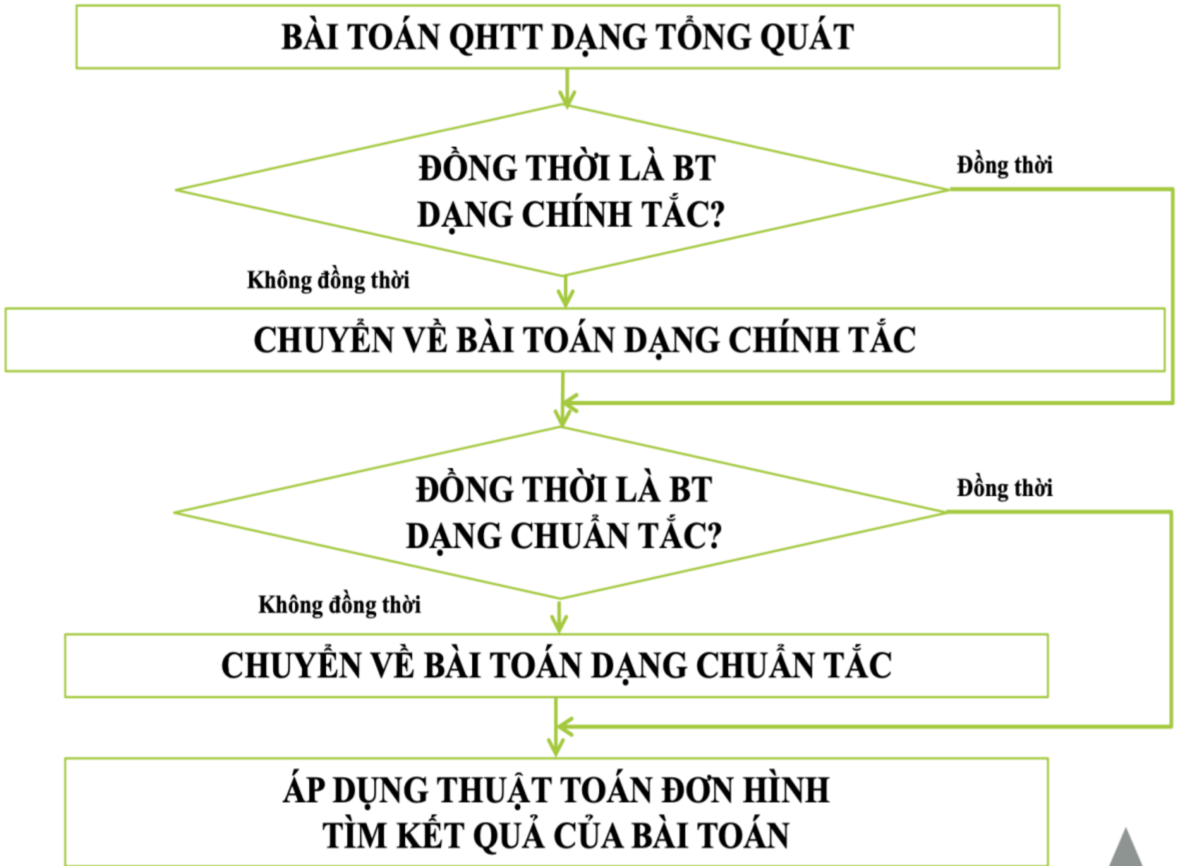
Lưu ý về dấu của Δj trong Chương 4

Trong chương này, hệ số ước lượng được viết theo quy ước Δj = cB.Aj - cj. Với quy ước này, bài toán Max đạt điều kiện tối ưu khi mọi Δj >= 0; bài toán Min đạt điều kiện tối ưu khi mọi Δj <= 0. Một số sách tiếng Anh dùng quy ước ngược lại, thường gọi là reduced cost cj - zj, nên dấu điều kiện tối ưu có thể đảo chiều. Khi học và giảng, cần bám đúng quy ước đang sử dụng trong chương để tránh nhầm dấu.

Bảng 4.10. Thành phần cơ bản trong bảng đơn hình

Thành phần trong bảng đơn hình	**Ý nghĩa tính toán**	**Ý nghĩa quản trị**
Biến cơ bản	Các biến đang nhận giá trị trong phương án hiện tại.	Các hoạt động/nguồn lực đang hiện diện trong kế hoạch.
Biến không cơ bản	Các biến đang bằng 0.	Hoạt động chưa được lựa chọn hoặc nguồn lực không đóng vai trò cơ sở.
Cột chủ yếu	Cột của biến vào.	Hoạt động có khả năng cải thiện mục tiêu.
Dòng chủ yếu	Dòng xác định biến ra thông qua tỉ số nhỏ nhất.	Ràng buộc sẽ bị chạm trước khi tăng hoạt động mới.
Phần tử trục xoay	Giao của cột chủ yếu và dòng chủ yếu.	Điểm chuyển đổi giữa hai phương án cơ bản.
Δj	Hệ số cải thiện.	Chỉ báo còn hay không còn cơ hội cải thiện quyết định.

Sử dụng phương pháp đơn hình đòi hỏi người nghiên cứu cần nắm bắt tính hệ thống hóa các bước trong việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính như trình bày trong sơ đồ dưới đây:



Sơ đồ tổng quát giải bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình

Hình 4.5. Sơ đồ tổng quát giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp đơn hình

Định lý cơ bản của quy hoạch tuyến tính

Cơ sở lý thuyết của phương pháp đơn hình là Định lý cơ bản của quy hoạch tuyến tính: nếu miền ràng buộc của bài toán khác rỗng và hàm mục tiêu bị chặn trên miền đó theo chiều tối ưu hóa, thì bài toán có ít nhất một phương án tối ưu, và tồn tại một phương án tối ưu đạt được tại một điểm cực biên (đỉnh) của miền ràng buộc.

Về mặt đại số, mỗi điểm cực biên của miền ràng buộc tương ứng với một phương án cơ bản khả thi. Vì số phương án cơ bản khả thi là hữu hạn (không vượt quá số cách chọn m cột cơ sở trong n cột của ma trận ràng buộc), nên việc tìm nghiệm tối ưu của một bài toán liên tục được quy về việc so sánh một số hữu hạn các đỉnh. Đây chính là lý do thuật toán đơn hình chỉ cần di chuyển lần lượt giữa các phương án cơ bản khả thi kề nhau thay vì dò tìm trên toàn bộ miền nghiệm.

Tính hữu hạn của thuật toán đơn hình

Tên gọi phương pháp hữu hạn của chương xuất phát từ tính chất sau: nếu tại mỗi bước lặp giá trị hàm mục tiêu được cải thiện ngặt (trường hợp không suy biến) thì không có phương án cơ bản khả thi nào bị xét lại, và vì số phương án cơ bản khả thi là hữu hạn nên thuật toán dừng sau hữu hạn bước, hoặc với một phương án tối ưu, hoặc với kết luận bài toán không bị chặn.

Khi xuất hiện suy biến (có biến cơ bản nhận giá trị 0), giá trị hàm mục tiêu có thể không cải thiện ở một vài bước; về lý thuyết điều này có thể dẫn tới hiện tượng xoay vòng. Các quy tắc chống xoay vòng (xem phần bổ sung ở mục 4.2.3) bảo đảm thuật toán vẫn kết thúc sau hữu hạn bước.

4.2.2.1 Phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

4.2.2.1.1 Thuật toán giải bài toán max

Để giải bài toán quy hoạch tuyến tính, thuật toán đơn hình được thiết lập bao gồm các bước sau:

Bước 1: Lập bảng đơn hình xuất phát (I)

Đưa bài toán về dạng chuẩn tắc và có được phương án cơ bản x_0. Tiến hành lập bảng đơn hình đầu tiên cùng với tính $f(x_0)$ và Δ_j theo các công thức.

Vẽ bảng đơn hình và ghi vào đó các thành phần sau của bài toán dạng chuẩn

- Dòng 1. Ghi các ẩn của bài toán (kể cả ẩn phụ)
- Dòng 2. Ghi các hệ số của các ẩn trong hàm mục tiêu
- Cột 2. Ghi các ẩn cơ bản của bài toán theo thứ tự từ ẩn cơ bản thứ nhất đến ẩn cơ bản cuối cùng, ta gọi cột này là cột ẩn cơ bản.
- Cột 1: Ghi tương ứng các hệ số của các ẩn cơ bản trong hàm mục tiêu, ta gọi cột này là cột hệ số cơ bản.
- Cột 3. Ghi các số hạng tự do của hệ ràng buộc chính theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta gọi cột này là cột phương án.
- Cột 4. Ghi ma trận điều kiện A của bài toán

Bảng 4.10. Thành phần cơ bản trong bảng đơn hình

Hệ số	Ẩn cơ bản	Phương án	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	…	x_n	λ_i
			c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	…	c_n	
c_1	x_1	b_1	1	0	…	0	$a_{1,m+1}$	$a_{1,m+2}$	…	a_{1n}	

c_2	x_2	b_2	0	1	…	0	$a_{2,m+1}$	$a_{2,m+2}$	…	a_{2n}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
c_m	x_m	b_m	0	0	…	1	$a_{m,m+1}$	$a_{m,m+2}$	…	a_{mn}	
$f(x_0)$			$\Delta_1=0$	$\Delta_2=0$	…	$\Delta_m=0$	Δ_{m+1}	Δ_{m+2}	…	Δ_n	$\Delta_j \geq 0$

Tính hệ số ước lượng Δ_j của các ẩn x_j = (1,2, , … n) và ghi tương ứng vào dòng dưới cột 4, với Δ_j được tính theo công thức sau:

$$\Delta j = \sum_{j=1}^{n} Ci * Aij \;-\; cj$$

Với $m+1 \leq j \leq n$

Δ_j = (cột1) (A_j) - hsx_j (hsx_j: hệ số của ẩn x_j trong hàm mục tiêu).

Chú ý. Nếu x_j là ẩn cơ bản thì $\Delta_j = 0$.

Tính trị số f_0 = (cot1) x (cot 3) và ghi dưới cột 3**.**

Bước 2: Xác định phương án cơ bản xuất phát

Với bảng đơn hình vừa lập được thì phương án cơ bản xuất phát x^0 của bài toán được xác định như sau: Cho các ẩn ở cột 2 nhận giá trị tương ứng ở cột 3, các ẩn còn lại nhận giá trị 0. Trị số của hàm mục tiêu tại phương án cơ bản xuất phát x^0 là $f(x^0) = f_0$.

Bước 3: Đánh giá tính tối ưu của phương án cơ bản xuất phát

• ***Dấu hiệu tối ưu:*** *Nếu hệ số ước lượng của các ẩn đều không âm* $\boldsymbol{\Delta_j \geq 0\ \forall j}$ *thì* **phương án cơ bản xuất phát x^0 là phương án tối ưu của bài toán**. *Thuật toán kết thúc với kết luận: Bài toán có PATU là x^0 và GTTU là $f(x^0)$.*

Dấu hiệu của bài toán không có PATU: *Nếu có ẩn không cơ bản x_k có hệ số ước lượng âm và cột điều kiện A_k của ẩn đó có các thành phần đều không dương,* $\boldsymbol{\Delta_k < 0}$ ***và*** $\boldsymbol{a_{ik} \leq 0; \forall i}$ **thì bài toán không có phương án tối** ưu. Thuật toán kết thúc với kết luận: Bài toán không có PATU.

Nếu không xảy ra cả hai trường hợp trên thì thuật toán tiếp tục trong bước lặp thứ hai

Bước lặp thứ hai (Bảng đơn hình thứ hai)

(1) Tìm ẩn đưa vào

Trong tất cả các $\Delta_j < 0$ ta cho $\Delta_v < 0$ nhỏ nhất (ta đánh dấu * cho $\Delta_v < 0$ nhỏ nhất trong bảng I) khi đó, x_v là ẩn mà ta sẽ đưa vào hệ ẩn cơ bản. Cột A_v được gọi là cột chủ yếu.

(2) Tìm ẩn đưa ra

Thực hiện phép chia lần lượt các số của cột phương án cho các số dương của cột chủ yếu và ghi các thương số λ_i đó vào cột cuối cùng.

Xác định $\lambda_i = \min\{\lambda_i\}$ (Ta đánh dấu * cho λ_r nhỏ nhất trong bảng). Khi đó x_r là ẩn mà ta đưa ra khỏi hệ ẩn cơ bản. Dòng có chứa x_r được gọi là dòng chủ yếu. Số dương nằm trên dòng chủ yếu và cột chủ yếu được gọi là hệ số chủ yếu hay còn gọi là phần tử trục xoay.

Chú ý. *Nếu cột chủ yếu chỉ có một số dương thì số dương đó là hệ số chủ yếu, dòng có số dương đó là dòng chủ yếu, ẩn nằm trên dòng chủ yếu là ẩn được đưa ra.*

(3) Lập bảng đơn hình thứ hai

Cột 2: Thay ẩn đưa ra bằng ẩn đưa vào, các ẩn cơ bản còn lại giữ nguyên. Dòng có ẩn đưa vào gọi là dòng chuẩn.

• Cột 1: Thay hệ số của ẩn đưa ra bằng hệ số của ẩn đưa vào, các hệ số của các ẩn cơ bản còn lại giữ nguyên.

Các thành phần còn lại được xác định theo dòng như sau

• Dòng chuẩn = Dòng chủ yếu chia cho hệ số chủ yếu.

• Dòng thứ i = Dòng thứ i (cũ) – a_{iv}.dòng chuẩn. (aiv: số nằm trên giao của dòng i và cột chủ yếu).

Các hệ số ước lượng và trị số của hàm mục tiêu trong bảng thứ hai được tính và ghi như bảng thứ nhất.

4) Xác định và đánh giá phương án cơ bản thứ hai (như bước lặp thứ nhất)

Các bước thực hiện cho bảng đơn hình số 3 …n cũng tương tự

Ví dụ 4.6:

Xét BTQHTT dạng Max:

$f(x) = -4x_1 + 12x_2 + 8x_3 - 4x_4 + 6x_5 \rightarrow \max$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 42 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 50 \\ 3x_2 + x_5 = 26 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$.

Giải:

Trước khi tiến hành giải bài toán quy hoạch tuyến tính chúng ta cần xác định bài toán đang ở dạng nào đó là tổng quát chính tắc hay chuẩn tắc.

Theo dự kiện của bài toán chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng các ràng buộc chính đều là phương trình và các ràng buộc dấu đều lớn hơn hoặc bằng 0. Cho nên bài toán đang ở dạng chính tắc.

Tiếp theo chúng ta xác định liệu rằng bài toán có phải là dạng chuẩn tắc hay không?

Chúng ta tiếp tục xét 2 điều kiện chúng ta thấy rằng hệ số tự do của ràng buộc chính đều không âm. Hệ số ma trận A là :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	**2**	**4**	**0**	**0**
0	**4**	**2**	**1**	**0**
0	**3**	**0**	**0**	**1**

Như vậy ma trận A có chứa 1 ma trận đơn vị cấp 3 cho nên ví dụ trên là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn.

Vì A chứa đủ 3 cột đơn vị e_1 (cột 1), e_2 (cột 4), e_3 (cột 5) nên bài toán có dạng chuẩn Trong đó:

- ***Ẩn cơ bản thứ nhất:*** $x_1 = 42$
- ***Ẩn cơ bản thứ hai:*** $x_4 = 50$
- ***Ẩn cơ bản thứ ba:*** $x_5 = 26$

Gán ẩn cơ bản thứ i cho hệ số cơ bản thứ i

Vậy phương án cơ bản xuất phát:

$x^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (42, 0, 0, 50, 26)$

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình

Tính hệ số ước lượng Δ_j

Δ_j = (cột1) (A_j) - hsx_j (hsx_j: hệ số của ẩn x_j trong hàm mục tiêu).

$\Delta_1 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0$

$\Delta_2 = (-4 \times 2) + (-4 \times 4) + (6 \times 3) - 12 = -18$

$\Delta_3 = (-4 \times 4) + (-4 \times 2) + (6 \times 0) - 8 = -32$

Trong bảng I ta thấy tồn tại các $\Delta_j < 0$: $\Delta_2 = -18$, $\Delta_3 = -32$ và trên mỗi cột tương ứng có hệ số dương. Ta chọn $\Delta_3 = -32$ âm nhỏ nhất và **ẩn đưa vào là x_3**, khi đó trên cột tương ứng có các hệ số dương là $a_{13} = 4$, $a_{23} = 2$ nên ta lập các tỉ số $\lambda 1 = 42 / 4$, $\lambda 2 = 50 / 2$.

Ta chọn $\lambda 1 = 42 / 4$ nhỏ nhất và **ẩn đưa ra là x_1 , hệ số chủ yếu là $a_{13} = 4$** . Sau đó biến đổi bảng I bằng các phép biến đổi sau:

Bảng 4.12. Bảng đơn hình các bước lặp của Ví dụ 4.6

Hệ số ẩn cơ bản	**Ẩn cơ bản**	**Phương án**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**λ_i**
			-4	12	8	-4	6	
-4	**x_1**	42	1	2	(4)	0	0	42/4*
-4	**x_4**	50	0	4	2	1	0	50/2
6	**x_5**	26	0	3	0	0	1	
		-212	0	-18	-32*	0	0	$\Delta_j \geq 0$
8	**x_3**	10.5	1/4	1/2	1	0	0	10.5/0.5
-4	**x_4**	29	-1/2	3	0	1	0	29/3
6	**x_5**	26	0	(3)	0	0	1	26/3*
		124	8	-2*	0	0	0	$\Delta_j \geq 0$
8	**x_3**	37/6	1/4	0	1	0	-1/6	
-4	**x_4**	3	-1/2	0	0	1	-1	
12	**x_2**	26/3	0	1	0	0	1/3	
			8	0	0	0	2/3	$\Delta_j \geq 0$

Dòng chuẩn = Dòng chủ yếu chia cho (hệ số chủ yếu) = Dòng chủ yếu / 4

Dòng thứ i = Dòng thứ i (cũ) – a_{iv}.dòng chuẩn. (a_{iv}: số nằm trên giao của dòng i và cột chủ yếu).

x_4 : 50 – 2 x (10.5) = 29 tương tự các cột khác trên dòng x_4

x_5 : 26 – 0 x (10.5) = 26 tương tự các cột khác trên dòng x_5

Trong bảng II ta thấy tồn tại các $\Delta_j < 0$: $\Delta_2 = -2$ và trên mỗi cột tương ứng có hệ số dương. Ta chọn $\Delta_2 = -2$ âm nhỏ nhất và **ẩn đưa vào là x_2** , khi đó trên cột tương ứng có các hệ số dương là $a_{13} = 1/2$, $a_{23} = 3$, $a_{33} = 3$ nên ta lập các tỉ số $\lambda_{1'} = 10,5/0.5$, $\lambda_2' = 29/3$, $\lambda_3'' = 26/3$.

Ta chọn $\lambda_3'' = 26/3$ nhỏ nhất và **ẩn đưa ra là x_5 , hệ số chủ yếu là $a_{33} = 3$** . Sau đó biến đổi bảng II

Dòng chuẩn = Dòng chủ yếu chia cho hệ số chủ yếu = Dòng chủ yếu / 3

Dòng thứ i = Dòng thứ i (cũ) – a_{iv}.dòng chuẩn. (aiv: số nằm trên giao của dòng i và cột chủ yếu).

x_3: 10.5 – 0.5 x (26/3) = tương tự các cột khác trên dòng x_3

x_4: 29 – 3 x (26/3) = 3 tương tự các cột khác trên dòng x_3

Trong bảng III ta thấy $\Delta_j \geq 0$ $\forall$j = 1, 2,3,4,5 nên bài toán đang xét có **PATU là**

x= (0, 26/3, 37/6,3,0) với $f(x^0)$= 424/3

Ví dụ 4.7:

Xét BTQHTT dạng Max:

$f(x) = 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 - x_4 + 6x_5 \to \max$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_4 + 9x_5 = 22 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 20 \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 26 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$.

Bài toán trên có dạng chính tắc với các vế phải của các phương trình ràng buộc trong (2) đều không âm. Ma trận hệ số của ràng buộc A=

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	**6**	**0**	**2**	**9**	**0**
0	**2**	**1**	**1**	**3**	**0**
0	**3**	**0**	**0**	**1**	**1**

Vì A chứa đủ 3 cột đơn vị e_1 (cột 1), e_2 (cột 3), e_3 (cột 6) nên bài toán có dạng chuẩn Trong đó:

- *Ẩn cơ bản thứ nhất:* **x_1 = 22**
- *Ẩn cơ bản thứ hai:* **x_3 = 20**
- *Ẩn cơ bản thứ ba:* **x_6 = 26**

Vậy phương án cơ bản xuất phát:

$x^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (22, 0, 20, 0, 0, 26)$

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình

Bảng 4.13. Bảng đơn hình kiểm tra tối ưu của Ví dụ 4.7

Hệ số ẩn cơ bản	**Ẩn cơ bản**	**Phương án**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	λ_i
			4	-5	8	-1	-6	0	
4	**x_2**	22	1	6	0	2	9	0	
8	x_3	20	0	2	1	1	3	0	
0	**x_6**	26	0	3	0	0	1	1	
		248	0	45	0	17	66	***0***	$\Delta_j \geq 0$

$\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_6 = 0$

$\Delta_2 = (4 \times 6) + (8 \times 2) + (0 \times 0) - (-5) = 45$

$\Delta_4 = (4 \times 2) + (8 \times 1) + (0 \times 0) - (-1) = 17$

$\Delta_5 = (4 \times 9) + (8 \times 3) + (0 \times 1) - (-6) = 66$

Trong bảng trên ta thấy $\Delta_j \geq 0$, $\forall_j = 1,\ldots,6$ nên bài toán có PATU là:

$x^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 22, 0, 20, 0, 26)$ với $f_0 = 4*22 + 8*20 = 248$

4.2.2.1.1 Thuật toán giải bài toán min

Giải tương tự bài toán max với chú ý sau:

- **Điều kiện tối ưu: $\Delta_j \leq 0, \forall_j$**
- **Điều kiện không có PATU: $\exists \Delta_k > 0$ và $a_{ik} \leq 0, \forall_i$**
- **Ẩn được chọn đưa vào: Ẩn ứng với $\Delta_k > 0$ lớn nhất**

Ví dụ 4.8

Xét BTQHTT dạng Min:

$f(x) = 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 - 8x_6 \rightarrow \min$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 30 \\ -2x_1 + x_3 - 2x_6 = 18 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 4 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$

Tương tự chúng ta tiến hành xét ma trận hệ số ràng buộc A của các ràng buộc chính ta có : A =

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} & \mathbf{x_4} & \mathbf{x_5} & \mathbf{x_6} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{array}$$

Vì A chứa đủ 3 cột đơn vị e_1 (cột 2), e_2 (cột 3), e_3 (cột 5) nên bài toán có dạng chuẩn Trong đó:

- ***Ẩn cơ bản thứ nhất:*** $\mathbf{x_2 = 30}$
- ***Ẩn cơ bản thứ hai:*** $\mathbf{x_3 = 18}$
- ***Ẩn cơ bản thứ ba:*** $\mathbf{x_5 = 4}$

Vậy phương án cơ bản xuất phát:

$x^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \mathbf{x_6}) = (0, 30, 18, 0, 4, 0)$

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình

Bảng 4.14. Bảng đơn hình của Ví dụ 4.8 đối với bài toán Min dạng chuẩn

Hệ số ẩn cơ bản	**Ẩn cơ bản**	**Phương án**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			7	2	2	4	2	-8	
2	$\mathbf{x_2}$	30	-1	1	0	-1	0	(1)	30/1
2	$\mathbf{x_3}$	18	-2	0	1	0	0	-2	

2	x_5	4	4	0	0	2	1	-3	
		104	-5	0	0	-2	0	***0***	$\Delta_j \leq 0$

Trong bảng 1 ta thấy tồn tại $\Delta_j \leq 0, \forall_j$ nên bài toán có PATU là:

$x^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 30, 18, 0, 4, 0)$ với $f_0 = 104$

4.2.2.2 Phương pháp đơn hình mở rộng giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Cho bài toán dạng chính tắc:

Bài toán dạng chính tắc:

(3) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min (\max)$

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad \forall i = \overline{1, m}$ (4.10)

(1) $x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n}$

Giả sử trọng hệ (2) chưa có một ẩn cơ bản nào. Khi đó mỗi phương trình ta thêm vào 1 ẩn cơ bản. Lúc đó bài toán trở thành:

(3) $f\left(x^{(M)}\right) = f(x) + M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \min (\max)$

(2) $x_{n+i} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad \forall i = \overline{1, m}$ (4.11)

(1) $x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n+m}$

Trong đó: x_{n+i} là ẩn giả, và có giá trị bằng 0 trong bảng đơn hình tối ưu.

M: là số lớn hơn 0 tùy ý đối với bài toán min; hoặc là số nhỏ hơn 0 tùy ý đối với bài toán max.

Thuật toán đơn hình mở rộng giải bài toán QHTT dạng chính tắc tương tự như thuật toán đơn hình giải bài toán QHTT dạng chuẩn nhưng có một số lưu ý như sau:

(1) Do hàm mục tiêu mở rộng là f(x) = f(x) +∑ (angia) đối với bài toán min và f(x) = f(x) - ∑ (angia) đối với bài toán max, nên trong bảng đơn hình ở cột hệ số có thể có các hệ số phụ thuộc M.

(2) Vì M là một đại lượng dương rất lớn, nên khi so sánh các số hạng aM + b và cM + d ta có quy tắc sau:

Lúc này bài toán (4.11) là bài toán dạng chuẩn tắc, và chúng ta có thể áp dụng thuật toán đơn hình như đã trình bày ở phần trên để giải với các **chú ý** (đối với bài toán min) sau đây:

So sánh Δ_j với 0:	**So sánh $\Delta_j = aM + b$ với $\Delta_q = a^{/}M + b^{/}$:**
$\Delta_j = aM + b \begin{cases} > 0 & \textbf{Nếu } a > 0 \\ < 0 & \textbf{Nếu } a < 0 \end{cases}$	$\Delta_j > \Delta_q$ **Nếu a > a$^{/}$ hoặc** $\Delta_j > \Delta_q$ **Nếu a = a$^{/}$ và b > b$^{/}$**

4) Trong bảng đơn hình đầu tiên các ẩn giả đều có trong ẩn cơ bản. Mỗi khi một ẩn giả bị đưa ra khỏi hệ ẩn cơ bản thì không bao giờ ta đưa ẩn giả đó trở lại nữa, vì vậy trong bảng đơn hình ta có thể bỏ đi các cột ứng với các ẩn giả.

− Nếu trong bảng đơn hình tối ưu còn có mặt ẩn giả trên cột "Ẩn cơ bản", thì ẩn giả ấy phải triệt tiêu (tức là =0), nếu không triệt tiêu thì bài toán gốc vô nghiệm.

Phương pháp hai pha (Two-Phase) — một lựa chọn thay thế phương pháp M lớn

Ngoài phương pháp M lớn, một cách khác để xử lý bài toán chưa có sẵn phương án cơ bản khả thi là phương pháp hai pha. Pha 1 giải một bài toán phụ với hàm mục tiêu là tổng các ẩn giả và yêu cầu cực tiểu hóa tổng này; nếu giá trị tối ưu của pha 1 bằng 0 thì mọi ẩn giả đã bị triệt tiêu và ta thu được một phương án cơ bản khả thi của bài toán gốc, còn nếu giá trị đó dương thì bài toán gốc vô nghiệm. Pha 2 lấy phương án cơ bản vừa tìm được làm điểm xuất phát và tối ưu hóa hàm mục tiêu gốc.

So với phương pháp M lớn, phương pháp hai pha tránh thao tác trên đại lượng tượng trưng M rất lớn, do đó ổn định hơn về mặt số học khi tính bằng phần mềm và ít gây nhầm dấu khi tính tay. Hai phương pháp luôn cho cùng kết luận; việc chọn phương pháp nào tùy thuộc vào thói quen trình bày và công cụ tính toán.

4.2.2.1.1 <u>Bài toán quy hoạch tuyến tính chưa có dạng chuẩn tắc (Min)</u>

<u>Ví dụ 4.9</u>

$f(x) = 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 6x_4 \leq 20 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 - 2x_4 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 \;\; + 2x_3 - 5x_4 = 24 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$ (j = 1,2,3,4)

Bảng 4.15. Quy tắc so sánh biểu thức chứa M trong phương pháp M lớn

Hệ số ẩn cơ bản	**Ẩn cơ bản**	**Phương án**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			2	-5	4	1	0	0	
0	x_5	20	3	1	4	-6	1	0	20/3
0	x_6	6	(1)	0	1	-2	0	1	6*
M	x_7	24	3	-1	2	-5	0	0	8
		24M	**3M-2**	-M+5	2M-4	-5M+1	0	0	$\Delta_j \leq$ ***0***
0	x_5	2	0	1	1	0	1	-3	
2	x_1	6	1	0	1	-2	0	1	
M	x_7	6	0	-1	-1	(1)	0	-3	6*
		6M+12	0	-M+5	-M-2	**M-5**	0	-3M	$\Delta_j \leq$ ***0***
0	x_5	2	0	1	1	0	1	-3	
2	x_1	18	1	-2	-1	0	0	-5	
1	x_4	6	0	-1	-1	1	0	-3	
		42	0	0	-7	0	0	*-13*	$\Delta_j \leq$ ***0***

PATU:x = (18,0,0,6), f(x)=42.

Vì x_2 là ẩn không cơ bản và $\Delta_2 = 0$. Do đó tập phương án tối ưu có dạng:

$x^* = x^0 + \lambda z^2$

$x^0 = (18, 0, 0, 6, 2, 0, 0)$

$z^2 = (2, 1, 0, 1, -1, 0, 0)$

$\Rightarrow x^* = (2\lambda+18, \lambda, 0, 6+\lambda, -\lambda+2, 0, 0)$

Với
$$\begin{cases} 2\lambda+18 \geq 0 \\ \lambda \geq 0 \\ 6+\lambda \geq 0 \\ -\lambda+2 \geq 0 \end{cases}$$

$0 \leq \lambda \leq 2$

4.2.2.1.2 **Bài toán quy hoạch tuyến tính chưa có dạng chuẩn tắc (Max)**

Ví dụ 4.10

Xét BTQHTT dạng Max:

$f(x) = 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 \rightarrow Max$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 20 \\ x_1 - 6x_2 + 5x_3 \geq -4 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

Giải

Tiến hành thêm vào bài toán 2 ẩn phụ x_4 , $x_5 \geq 0$ ta được bài toán chính tắc

$f(x) = 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 \rightarrow Max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 20 \\ x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_5 = -4 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 , x_5 \geq 0.$

Vì $b_3 = -4 < 0$ nên ta đổi dấu hai vế của ràng buộc số 3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 20 \\ -x_1 + 6x_2 - 5x_3 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$

Tiếp theo tiến hành xét ma trận hệ số ràng buộc chính A

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	2	1	1	0	0
2	1	-4	0	0	1
-1	6	-5	0	1	0

Ma trận A đã có 2 cột đơn vị e_1 (cột 4) và e_3 (cột 5) tiến hành thêm cột e_2 ở ẩn giả x_6 => bài toán đã có dạng chuẩn.

$f(x) = 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 - Mx_6 \rightarrow Max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_6 = 20 \\ -x_1 + 6x_2 - 5x_3 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$

Ta có ẩn cơ bản như sau:

• ***Ẩn cơ bản thứ nhất:*** **$x_4 = 18$**

• ***Ẩn cơ bản thứ hai:*** **$x_6 = 20$**

• ***Ẩn cơ bản thứ ba:*** **$x_5 = 4$**

Phương án cơ bản xuất phát

$x^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 18, 4, 20)$

Tiến hành thiết lập bảng đơn hình

Bảng 4.17. Bảng đơn hình mở rộng của Ví dụ 4.10 đối với bài toán Max chưa có dạng chuẩn

Hệ số ẩn cơ bản	Ẩn cơ bản	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	λ_i
			6	4	-2	0	0	
0	x_4	18	1	2	1	1	0	18
-M	x_6	20	2	1	-4	0	0	10
0	x_5	4	-1	6	-5	0	1	--
		-20M	-2M-6	-M-4	4M+2	0	0	$\Delta_j \geq 0$
0	x_4	8	0	3/2	3	1	0	
6	x_1	10	1	1/2	-2	0	0	
0	x_5	14	0	13/2	-7	0	1	
			0	-1	-10	0	0	$\Delta_j \geq 0$
-2	x_3	8/3	0	1/2	1	1/3	0	
6	x_1	46/3	1	3/2	0	2/3	0	
0	x_5	98/3	0	10	0	7/3	1	
			0	4	0	10/3	0	$\Delta_j \geq 0$

Kết luận :

Phương án tối ưu $x^2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (46/3, 0, 8/3, 0, 98/3, 0)$ và $f(x^2) = 260/3$

Kết luận bài toán gốc PATU $x^2 = (x_1, x_2, x_3) = (46/3, 0, 8/3)$

4.2.3. Nhận xét nghiệm của bài toán quy hoạch tuyến tính

Bảng 4.18. Dấu hiệu và ý nghĩa quản trị của các trạng thái nghiệm trong quy hoạch tuyến tính

Trạng thái nghiệm	Dấu hiệu thường gặp	Thông điệp quản trị
Nghiệm tối ưu duy nhất	Không còn biến không cơ bản có $\Delta j = 0$ ở bảng tối ưu.	Có một kế hoạch tốt nhất theo mô hình hiện tại.

Vô số nghiệm tối ưu	Có biến không cơ bản với $\Delta j = 0$ ở bảng tối ưu.	Có nhiều kế hoạch cùng tốt; có thể chọn theo rủi ro, tính linh hoạt, nhân sự hoặc ưu tiên chiến lược.
Vô nghiệm	Các ràng buộc xung đột; biến giả còn dương trong phương pháp M lớn.	Các yêu cầu hiện tại không thể thỏa mãn đồng thời; cần nới lỏng hoặc điều chỉnh ràng buộc.
Không bị chặn	Có hướng cải thiện nhưng không có giới hạn chặn.	Mô hình thiếu ràng buộc thực tế như ngân sách, công suất, nhu cầu hoặc giới hạn thị trường.
Suy biến	Có biến cơ bản bằng 0.	Nhiều ràng buộc gặp nhau tại cùng một điểm; cần cẩn trọng khi đọc tiến trình lặp.

4.2.3.1 Trường hợp bài toán có vô số nghiệm

Giả sử tìm được 1 phương án tối ưu $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ của bài toán quy hoạch tuyến tính mà trong bảng đơn hình tối ưu (bảng đơn hình cuối) nếu tồn tại $\Delta_k = 0$ với x_k là ẩn không cơ bản thì bài toán đó có thể có vô số nghiệm (phương án tối ưu). Khi đó tập phương án tối ưu của bài toán có dạng:

$x^* = x^0 + \lambda z^k$

Trong đó: $z^k = (z_1^k, z_2^k, ..., z_n^k)$ và

$$z_j^k = \begin{cases} -a_{ik} & \text{Với } x_j \text{ là ẩn cơ bản của phương trình thứ i} \\ 0 & \text{Với } x_j \text{ là ẩn không cơ bản và } j\ \ k \\ 1 & \text{Với } j = k \end{cases}$$

Sau đó ta lưu ý để tìm λ để tập nghiệm x^k không âm.

Ví dụ 4.11:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

(3) $f(x) = 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$

(2) $\begin{cases} -2x_1 - x_3 + 3x_4 \leq -12 \end{cases}$

$$x_2 + x_3 + 2x_4 = 14$$

$$4x_1 + x_3 - 9x_4 \le 36$$

$$3x_1 + 2x_3 - 5x_4 \le 23$$

(1) $x_j \ge 0 \quad \forall j = \overline{1,4}$

a) Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình?

b) Nhận xét phương án tối ưu

a) Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình?

Bài toán dạng chuẩn tắc là:

(3) $f(x) = 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 + Mx_8 \rightarrow \min$

(2) $$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 3x_4 - x_5 + x_8 = 12 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 14 \\ 4x_1 + x_3 - 9x_4 + x_6 = 36 \\ 3x_1 + 2x_3 - 5x_4 + x_7 = 23 \end{cases}$$

(1) $x_j \ge 0 \quad \forall j = \overline{1,8}$

Hệ số	Ẩn cơ bản	Phương án	2	-5	-4	2	0	0	0	M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
M	x_8	12	2	0	1	-3	-1	0	0	1
-5	x_2	14	0	1	1	2	0	0	0	0
0	x_6	36	4	0	1	-9	0	1	0	0
0	x_7	23	3	0	2	-5	0	0	1	0
$f(x_0) =$	12M-70		2M-2	0	M-1	-3M-12	-M	0	0	0
2	x_1	6	1	0	1/2	-3/2	-1/2	0	0	
-5	x_2	14	0	1	1	2	0	0	0	
0	x_6	12	0	0	-1	-3	2	1	0	
0	x_7	5	0	0	1/2	-1/2	3/2	0	1	
$f(x'_0) =$		-58	0	0	0	-15	-1	0	0	

Vì $\Delta_j < 0 \ \forall j = \overline{1,7} \Rightarrow$ Phương án tối ưu:

$f_{min} = -58$ tại $x^0 = (6, 14, 0, 0, 0, 12, 5)$.

b) Nhận xét phương án tối ưu?

Vì x_3 là ẩn không cơ bản và $\Delta_3 = 0$. Do đó tập phương án tối ưu có dạng:

$x^* = x^0 + \lambda z^3$

$x^0 = (6, 14, 0, 0, 0, 12, 5)$

$z^3 = (-1/2, -1, 1, 0, 0, 1, -1/2)$

$\Rightarrow x^* = (-\frac{1}{2}\lambda+6, -\lambda+14, \lambda, 0, 0, \lambda+12, -\frac{1}{2}\lambda+5)$

Với $\begin{cases} -\frac{1}{2}\lambda + 6 \geq 0 \\ -\lambda + 14 \geq 0 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda + 12 \geq 0 \\ -\frac{1}{2}\lambda + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq \lambda \leq 10$

Kết luận

- Bài toán có vô số nghiệm tối ưu trong khoảng $\Leftrightarrow 0 \leq \lambda \leq 10$
- Giá trị tối ưu của hàm mục tiêu không thay đổi trong khoảng này.
- Tập nghiệm tối ưu thuộc một đoạn thẳng trong không gian nghiệm, phản ánh tính chất đa nghiệm của bài toán quy hoạch tuyến tính.

Giải thích

Trong phương pháp đơn hình, khi một biến không cơ bản có $\Delta_j = 0$, điều đó có nghĩa là ta có thể thay đổi giá trị của biến đó mà không làm thay đổi giá trị tối ưu của hàm mục tiêu.

- z^3 là **hướng tự do** hay **hướng suy biến** (degenerate direction), thể hiện cách mà phương án tối ưu có thể thay đổi khi cho phép x_3 tăng từ 0 lên một giá trị dương.
- Dạng tổng quát của tập phương án tối ưu là: $x^* = x_0 + \lambda z^3$ với λ là một tham số thực phù hợp.

Quy tắc chung:

- Nếu ta tăng một biến không cơ bản (trong trường hợp này là x_3 lên 1 đơn vị, các biến cơ bản sẽ thay đổi theo cột tương ứng của x_3 trong bảng đơn hình cuối cùng.
- Cột tương ứng với x_3 trong bảng đơn hình cuối cùng là:

Biến cơ bản	Giá trị thay đổi khi x3 tăng 1 đơn vị
x_1	-1/2
x_2	-1
x_3	1 (vì ta xét theo hướng di chuyển của x3
x_4	0
x_5	0
x_6	1
x_7	-1/2

Đây chính là giá trị của z^3, tức là:

$z^3 = (-1/2, -1, 1, 0, 0, 1, -1/2)$

Tại sao $x_4 = 0$ và $x_5 = 0$?

- Trong bảng đơn hình cuối cùng, x_4 và x_5 **không phải là biến cơ bản** (chúng không xuất hiện trong danh sách các biến cơ bản).
- Điều này có nghĩa là nếu ta tăng x_3, các biến cơ bản sẽ thay đổi theo hướng z^3, nhưng x_4 và x_5 sẽ **không thay đổi**. Do đó, thành phần của z^3 tại vị trí của x_4 và x_5 là 0.

4.2.3.2 Trường hợp bài toán nghiệm duy nhất

Suy biến, hiện tượng xoay vòng và quy tắc Bland

Khi một phương án cơ bản khả thi là suy biến (có ít nhất một biến cơ bản bằng 0), tỉ số nhỏ nhất dùng để chọn biến ra có thể bằng 0, khiến một bước lặp tuy đổi cơ sở nhưng không làm thay đổi phương án và giá trị hàm mục tiêu. Trong trường hợp hiếm gặp, một chuỗi các bước như vậy có thể lặp lại một cơ sở đã xét, gọi là hiện tượng xoay vòng (cycling), làm thuật toán không kết thúc.

Để bảo đảm thuật toán luôn dừng, có thể dùng quy tắc Bland: trong số các biến đủ điều kiện được chọn đưa vào hoặc đưa ra, luôn ưu tiên biến có chỉ số nhỏ nhất. Quy tắc Bland đơn giản và bảo đảm không xoay vòng, đổi lại đôi khi làm tăng số bước lặp. Trên thực tế, xoay vòng rất hiếm xảy ra với dữ liệu thông thường, nhưng việc nắm quy tắc chống xoay vòng là cần thiết khi lập trình thuật toán hoặc khi gặp bài toán suy biến nặng.

Bài toán có một nghiệm tối ưu duy nhất nếu **tại phương án tối ưu**, tất cả các hệ số cải thiện Δj của các biến không cơ bản đều **nhỏ hơn 0** ($\Delta_j < 0$), tức là:

Khi phương án tối ưu đã được tìm thấy, tất cả các Δ_j **< 0** đối với bài toán **cực tiểu (minimization)**.

- Điều này có nghĩa là không còn hướng nào có thể cải thiện được giá trị hàm mục tiêu, tức là chúng ta đã đạt được điểm cực tiểu của hàm mục tiêu.

Không có $\Delta_k = 0$ đối với các biến không cơ bản:

- Nếu $\Delta_k = 0$ cho một số biến không cơ bản, điều này có thể chỉ ra rằng bài toán có **vô số nghiệm tối ưu**.

Không có hướng di chuyển nào có thể làm cải thiện hàm mục tiêu:

- Nếu không có hướng cải thiện nào (tức là không có Δj>0 và các Δj đều nhỏ hơn 0 (hoặc không có Δj=0), điều đó có nghĩa là không thể di chuyển trong không gian nghiệm mà vẫn giữ được giá trị hàm mục tiêu tối ưu.

Ví dụ 4.12:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(x) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 6x_3 + 3x_4 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \forall j = \overline{1;5}$$

Anh/chị hãy giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình? Hãy nhận xét phương án tối ưu của bài toán?

Giải:

Chuyển bài toán về dạng chính tắc (đồng thời là chuẩn tắc) đúng.

Hệ số	ACB	PA	2	-3	4	-5	2	0
			x1	x2	x3	x4	x5	x6

2	x5	5	3	0	5	4	1	0
-3	x2	3	4	1	2	2	0	0
0	x6	4	2	0	6	3	0	1
f(x0)=		**1**	**-8**	**0**	**0**	**7**	**0**	**0**
-5	x4	5/4	3/4	0	5/4	1	1/4	0
-3	x2	1/2	5/2	1	-1/2	0	-1/2	0
0	x6	1/4	-1/4	0	9/4	0	-3/4	1
f(x/0)=		**-31/4**	**-53/4**	**0**	**-35/4**	**0**	**-7/4**	**0**
Nhận xét: Bài toán chỉ có 01 phương án tối ưu duy nhất.								

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bảng 4.22. Yêu cầu trình bày bài làm chương 4

Phần cần có trong bài làm	Mô tả yêu cầu
Mô hình đại số	Phải nêu rõ biến, mục tiêu, ràng buộc và điều kiện không âm.
Dạng chuẩn	Nếu dùng đơn hình, cần chỉ rõ biến phụ, biến dư, biến giả và phương án cơ bản xuất phát.
Bảng đơn hình	Cần tính đúng Δj, chọn biến vào/ra và phần tử trục xoay.
Kết luận nghiệm	Nêu x*, giá trị tối ưu và loại nghiệm: duy nhất, vô số, vô nghiệm hoặc không bị chặn.
Ý nghĩa quản trị	Diễn giải kết quả thành kế hoạch hành động và nhận xét ràng buộc chặt/số dư.

Câu 1. Xét BTQHTT dạng Max:

$f(x) = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 120 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

a. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đồ thị?

b. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

c. Minh họa ý nghĩa kinh tế của bài toán trong một tình huống thực tế?

Câu 2:

Xét BTQHTT dạng Min:

$f(x) = 3x_1 - x_2 \rightarrow \min$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 4 \leq x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

a. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đồ thị?

b. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

Câu 3:

Xét BTQHTT dạng Max:

$f(x) = 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 44 \\ 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 36 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

a. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

b. Giải bài toán bằng phần mềm Excel

Câu 4:

Xét BTQHTT dạng Min:

$f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

a. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình mở rộng (phương pháp M).

b. Giải bài toán bằng phần mềm Excel?

Câu 5:

Xét BTQHTT dạng Min:

$f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 \rightarrow \min$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 12x_3 \geq 12 \\ x_1 + 4x_3 \leq 6 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

a. Hãy đưa bài toán về dạng chính tắc?

b. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình mở rộng (phương pháp M)?

c. Giải bài toán bằng phần mềm Excel?

Câu 6:

Một công ty sản xuất ba loại sản phẩm I, II và III. Để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm I cần có 3 đơn vị nguyên liệu loại A, 2 đơn vị nguyên liệu loại B và 1 đơn vị nguyên liệu loại C. Sản xuất một đơn vị sản phẩm loại II cần 4 đơn vị nguyệnliệu loại A, 1 đơn vị nguyện liệu loại B và 3 đơn vị nguyện liệu loại C. Sản xuất 1 đơn vị sản phẩm loại III cần 2 đơn vị nguyện liệu loại A, 2 đơn vị nguyện liệu loại B và 2 đơn vị nguyện liệu loại C. Lượng nguyên liệu dự trữ loại A, B và C hiện có là 60, 40 và 80 (đơn vị). Công ty muốn xác định phương án sản xuất để tối đa hoá lợi nhuận, biết lợi nhuận đơn vị sản phẩm bán ra là 2, 4 và 3 (đơn vị tiền tệ) cho các sản phẩm loại I, II và III.

a) Lập mô hình LP bằng phương pháp đại số?

b) Tìm phương án tối ưu bằng phương pháp đơn hình?

Câu 7:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$f(x) = x1 + x2 + x3 + x4 + x5 \rightarrow \min$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 5x1 + x2 + x3 + x4 = 3 \\ 3x1 + 2x2 + x3 \leq 1 \\ 2x1 + 5x2 + x3 + x5 = 4 \end{cases}$$

$x1, x2, x3, x4, x5 \geq 0$.

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

Câu 8:

Xí nghiệp sản xuất giấy có 3 phân xưởng. Do trang bị kỹ thuật khác nhau nên mức hao phí tre gỗ, axit để sản xuất một tấn giấy thành phẩm cũng khác nhau. Mức hao phí được cho trong bảng dưới đây:

	Mức hao phí nguyên vật liệu cho 1 tấn giấy		
Nguyên liệu	Phân xưởng 1	Phân xưởng 2	Phân xưởng 3
Tre gỗ	4	2	2
Axit	1	1	2

Số lượng tre gỗ có trong năm là 30 tấn, Axit là 20 tấn.

a. Lập mô hình bằng bảng tính với giả định rằng mỗi phân xưởng sản xuất 5 tấn giấy? Nhận xét?

b. Xây dựng mô hình bằng phương pháp đại số sao cho tổng số giấy sản xuất trong năm của xí nghiệp là nhiều nhất.

c. Tìm phương án tối ưu bằng phương pháp đơn hình?

Câu 9:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$f(x) = 3x1 + x2 + 5x3 + 3x4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x1 + x2 + 2x3 = 30 \\ 2x1 + x2 + 3x3 + x4 \geq 15 \\ 2x2 + 3x4 \leq 25 \end{cases}$$

$x1, x2, x3, x4 \geq 0.$

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

Câu 10:

Một công ty sản xuất 3 loại sản phẩm là máy phát điện loại lớn, máy phát điện loại nhỏ và máy phát điện loại vừa. Các số liệu liên quan như sau:

(1) Dữ liệu về tài chính cho mỗi loại sản phẩm:

Máy phát điện	**Giá bán (1.000$)**	**Chi phí lao động và nguyên vật liệu trên một sản phẩm (1.000$)**
Loại lớn	80	74
Loại nhỏ	24	20
Loại vừa	40	35

(2) Các sản phẩm này được sản xuất trong cả 3 phân xưởng A, B và C. Ba phân xưởng này có số giờ sử dụng lần lượt là 150 giờ, 180 giờ, 170 giờ.

(3) Để sản xuất một máy phát điện loại lớn cần sử dụng 8 giờ máy trong phân xưởng A, 15 giờ máy trong phân xưởng B và 18 giờ máy trong phân xưởng C. Để sản xuất một máy phát điện loại nhỏ cần sử dụng 6 giờ máy trong phân xưởng A, 10 giờ máy trong phân xưởng B và 12 giờ máy trong phân xưởng C. Trong khi đó mỗi một máy phát điện loại vừa cần sử dụng 4 giờ máy trong phân xưởng A, 16 giờ máy trong phân xưởng B và 12 giờ máy trong phân xưởng C.

(4) Việc thử nghiệm được thực hiện trong phân xưởng thứ 4 và không có liên quan gì đến 3 phân xưởng trên. Mỗi một máy phát điện loại lớn, nhỏ, vừa lần lượt cần 6 giờ, 4 giờ, 5 giờ thử nghiệm. Hợp đồng lao động của công ty quy định rằng tổng số giờ thử nghiệm không được thấp hơn 50 giờ.

a) Giả sử mỗi loại máy phát điện được sản xuất với số lượng là 5, xây dựng mô hình bằng bảng tính? nhận xét và giải thích về tính khả thi của phương án này?

b) Thiết lập mô hình LP bằng phương pháp đại số?

c) Tìm số máy phát điện mỗi loại cần được sản xuất để công ty tối đa hóa lợi nhuận bằng phương pháp đơn hình? (Lưu ý việc làm tròn để số máy phát điện là một số nguyên chỉ được thực hiện sau khi hoàn tất phương pháp đơn hình).

Câu 11:

$$f(x) = -2x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1;5}$$

Giải bằng phương pháp đơn hình? Nhận xét phương án tối ưu?

PHẦN BÀI GIẢI MẪU

Bài giải mẫu 1:

$$f(x) = -2x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 5x_4 - 7x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_3 + 2x_4 - 7x_5 \leq 22 \\ -2x_1 - 5x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 14 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 19 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1;5}$$

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

Bài giải:

Chuyển bài toán về dạng chính tắc
Chuyển bài toán về dạng chuẩn tắc

Hệ số	ACB	PA	-2	6	-6	5	-7	0	M
			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
0	x6	22	3	0	3	2	-7	1	0
M	x7	14	-2	0	-5	2	4	0	1
6	x2	19	3	1	4	5	-3	0	0
f(x0)=		14M + 114	-2M + 20	0	-5M + 30	2M + 25	4M -11	0	0
0	x6	93/2	-1/2	0	-23/4	11/2	0	1	
-7	x5	7/2	-1/2	0	-5/4	1/2	1	0	
6	x2	59/2	3/2	1	1/4	13/2	0	0	
f(x/0)=		305/2	29/2	0	65/4	61/2	0	0	
0	x6	725	34	23	0	155	0	1	
-7	x5	151	7	5	0	33	1	0	
-6	x3	118	6	4	1	26	0	0	
f(x//0)=		-1765	-83	-65	0	-392	0	0	

Bài giải mẫu 2:

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_5 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \forall j = \overline{1;5}$$

Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình và nhận xét phương án tối ưu?

Bài giải:

Hệ số	ACB	PA	1	-2	3	0	2	0	0	M
			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
0	x4	2	4	6	4	1	0	0	0	0
2	x5	3	-2	-5	3	0	1	0	0	0
0	x6	5	3	-3	4	0	0	1	0	0
M	x8	2	1	8	5	0	0	0	-1	1
f(x0)=		2M + 6	M -5	8M -8	5M + 3	0	0	0	-M	0
0	x4	2/5	16/5	-2/5	0	1	0	0	4/5	
2	x5	9/5	-13/5	-49/5	0	0	1	0	3/5	
0	x6	17/5	11/5	-47/5	0	0	0	1	4/5	
3	x3	2/5	1/5	8/5	1	0	0	0	-1/5	
f(x/0)=		24/5	-28/5	-64/5	0	0	0	0	3/5	
0	x7	1/2	4	-1/2	0	5/4	0	0	1	
2	x5	3/2	-5	-19/2	0	-3/4	1	0	0	
0	x6	3	-1	-9	0	-1	0	1	0	
3	x3	1/2	1	3/2	1	1/4	0	0	0	
f(x//0)=		9/2	-8	-25/2	0	-3/4	0	0	0	

Nhận xét: Bài toán có duy nhất một nghiệm.

Bài giải mẫu 3:

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 \ \square\ \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_4 + x_5 \leq 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 16 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_4 - 3x_5 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1;5}$$

a. Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

b. Nhận xét phương án tối ưu?

Bài giải:

a.

Hệ số	ACB	PA	1	2	1	2	0	0	M
			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
0	x6	12	2	1	0	4	1	1	0
1	x3	16	2	2	1	2	1	0	0
M	x7	10	1	4	0	-2	-3	0	1
g(x0)=		10M + 16	M + 1	4M	0	-2M	-3M + 1	0	0
0	x6	19/2	7/4	0	0	9/2	7/4	1	
1	x3	11	3/2	0	1	3	5/2	0	
2	x2	5/2	1/4	1	0	-1/2	-3/4	0	
g(x/0)=		16	1	0	0	0	1	0	
1	x1	38/7	1	0	0	18/7	1	4/7	
1	x3	20/7	0	0	1	-6/7	1	-6/7	
2	x2	8/7	0	1	0	-8/7	-1	-1/7	
g(x//0)=		74/7	0	0	0	-18/7	0	-4/7	

b. $0 \leq \lambda \leq 20/7$

Bài giải mẫu 4:

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 3 \\ 7x_2 + 6x_3 - 4x_4 \leq 2 \\ -3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1;4}$$

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình?

Hệ số	ACB	PA	2	1	4	5	0	M
			x1	x2	x3	x4	x5	x6
2	x1	3	1	2	-4	1	0	0
0	x5	2	0	7	6	-4	1	0
M	x6	6	0	-3	2	4	0	1
f(x0)=		6M + 6	0	-3M + 3	2M -12	4M -3	0	0
2	x1	3/2	1	11/4	-9/2	0	0	
0	x5	8	0	4	8	0	1	
5	x4	3/2	0	-3/4	1/2	1	0	
f(x/0)=		21/2	0	3/4	-21/2	0	0	
1	x2	6/11	4/11	1	-18/11	0	0	
0	x5	64/11	-16/11	0	160/11	0	1	
5	x4	21/11	3/11	0	-8/11	1	0	
f(x//0)=		111/11	-3/11	0	-102/11	0	0	

Bài giải mẫu 5:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(x) = 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 + 4x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 6x_3 + 3x_4 + x_6 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \forall j = \overline{1;6}$$

Tìm phương án tối ưu cho bài toán trên? Nhận xét phương án tối ưu?

Bài giải:

Hệ số	ACB	PA	5	-1	2	-4	2	4
			x1	x2	x3	x4	x5	x6
2	x5	8	3	0	5	4	1	0
-1	x2	3	4	1	1	2	0	0
4	x6	5	2	0	6	3	0	1
f(x0)=	0	33	5	0	31	22	0	0
2	x5	2	-5	-2	3	0	1	0
-4	x4	3/2	2	1/2	1/2	1	0	0
4	x6	1/2	-4	-3/2	9/2	0	0	1
f(x/0)=	0	0	-39	-11	20	0	0	0
2	x5	5/3	-7/3	-1	0	0	1	-2/3
-4	x4	13/9	22/9	2/3	0	1	0	-1/9
2	x3	1/9	-8/9	-1/3	1	0	0	2/9
f(x//0)=	0	-20/9	-191/9	-13/3	0	0	0	-40/9

Bài toán chỉ có duy nhất một phương án tối ưu.

TÓM TẮT VÀ GHI NHỚ CHƯƠNG 4

Chương 4 trình bày hệ thống các phương pháp hữu hạn để giải bài toán quy hoạch tuyến tính. Phương pháp đồ thị giúp người học quan sát trực quan miền nghiệm khả thi, các điểm cực biên và sự dịch chuyển của đường hàm mục tiêu. Phương pháp đơn hình mở rộng tư tưởng đó cho bài toán nhiều biến bằng cách di chuyển từ phương án cơ bản khả thi này sang phương án cơ bản khả thi khác cho đến khi đạt điều kiện tối ưu.

Điểm quan trọng của chương là không học thuật toán một cách máy móc. Mỗi thao tác trong bảng đơn hình đều có ý nghĩa: chọn biến vào là quyết định tăng một hoạt động có khả năng cải thiện mục tiêu; chọn biến ra là xác định nguồn lực hoặc hoạt động bị giới hạn trước; kiểm tra Δj là kiểm tra còn hay không còn cơ hội cải thiện. Khi kết luận, người học cần nêu cả nghiệm tối ưu, giá trị tối ưu và ý nghĩa của các ràng buộc chặt, số dư, biến phụ, biến dư và biến giả.

Bảng 4.25. Tóm tắt nội dung cần ghi nhớ của chương 4

Nội dung cần ghi nhớ	Ý nghĩa cốt lõi
Dạng chuẩn tắc	Điều kiện để có phương án cơ bản xuất phát cho thuật toán đơn hình.
Điểm cực biên	Nơi có thể xuất hiện nghiệm tối ưu của bài toán tuyến tính.
Biến vào	Biến có khả năng cải thiện hàm mục tiêu và được đưa vào cơ sở.
Biến ra	Biến bị loại khỏi cơ sở để bảo đảm nghiệm mới vẫn khả thi.
Ràng buộc chặt	Ràng buộc có số dư bằng 0; thường là nguồn lực khan hiếm.
Nhiều nghiệm tối ưu	Cho phép nhà quản lý lựa chọn thêm theo tiêu chí phụ.
Vô nghiệm/không bị chặn	Tín hiệu cần kiểm tra lại mô hình, dữ liệu hoặc ràng buộc thực tế.

CHECKLIST KIỂM TRA TRƯỚC KHI GIẢI BÀI TOÁN LP

Bảng 4.26. Checklist kiểm tra trước khi giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Nội dung kiểm tra	Câu hỏi cần trả lời
Mục tiêu	Bài toán đang tối đa hóa hay tối thiểu hóa đại lượng nào?

Biến quyết định	Mỗi biến có đơn vị đo rõ ràng chưa? Biến có bắt buộc nguyên không?
Ràng buộc	Mỗi ràng buộc đã đúng dấu ≤, ≥, = chưa?
Dạng bài toán	Bài toán đang ở dạng tổng quát, chính tắc hay chuẩn tắc?
Biến thêm vào	Đã phân biệt đúng biến phụ, biến dư và biến giả chưa?
Phương án cơ bản xuất phát	Có xác định được cơ sở ban đầu hợp lệ không?
Điều kiện tối ưu	Dấu của Δj đã được kiểm tra đúng với bài toán max/min chưa?
Diễn giải	Kết quả đã được chuyển thành khuyến nghị quản trị chưa?

MỘT SỐ VÍ DỤ NÂNG CAO

Ví dụ bổ sung 4.A - Tối đa hóa lợi nhuận và đọc ràng buộc chặt

Một doanh nghiệp sản xuất hai sản phẩm A và B. Mỗi sản phẩm A đem lại lợi nhuận 40, cần 4 kg nguyên liệu và 6 giờ gia công. Mỗi sản phẩm B đem lại lợi nhuận 30, cần 5 kg nguyên liệu và 3 giờ gia công. Doanh nghiệp có tối đa 200 kg nguyên liệu và 210 giờ gia công. Ngoài ra, công suất máy giới hạn bởi $4x_1 + 2x_2 <= 150$. Hãy tìm phương án tối ưu và diễn giải ý nghĩa quản trị.

Mô hình: Max $Z = 40x_1 + 30x_2$; $4x_1 + 5x_2 <= 200$; $6x_1 + 3x_2 <= 210$; $4x_1 + 2x_2 <= 150$; $x_1, x_2 >= 0$.

Nghiệm tối ưu là $x_1 = 25$, $x_2 = 20$, Zmax = 1.600. Tại nghiệm này, ràng buộc nguyên liệu và thời gian gia công đều chặt, còn ràng buộc công suất máy còn dư 10 đơn vị. Về quản trị, doanh nghiệp chưa cần ưu tiên đầu tư thêm máy móc; thay vào đó, cần xem xét tăng nguồn nguyên liệu hoặc cải thiện thời gian gia công nếu muốn mở rộng lợi nhuận.

Ví dụ bổ sung 4.B - Nhận diện mô hình không bị chặn

Giả sử một mô hình tối đa hóa lợi nhuận cho phép doanh nghiệp tăng sản lượng mà không có ràng buộc về công suất, ngân sách, nhu cầu thị trường hoặc nguyên liệu. Nếu bảng đơn hình cho thấy còn biến có khả năng cải thiện mục tiêu nhưng cột chủ yếu không có hệ số dương để tính tỉ số, bài toán có thể không bị chặn.

Ý nghĩa quản trị của trường hợp không bị chặn
Không bị chặn thường không có nghĩa là doanh nghiệp thật sự có thể đạt lợi nhuận vô hạn. Nó thường cho thấy mô hình đã thiếu một ràng buộc thực tế, chẳng hạn giới hạn ngân sách, giới

hạn công suất, giới hạn nhu cầu, giới hạn tồn kho hoặc giới hạn nhân sự. Vì vậy, thay vì xem đây là một lời giải tốt, nhà quản lý cần quay lại kiểm tra mô hình.

Ví dụ bổ sung 4.C - Vô số nghiệm tối ưu và lựa chọn theo tiêu chí phụ

Trong một số bài toán, hai phương án hoặc một đoạn phương án có cùng giá trị hàm mục tiêu. Khi bảng đơn hình tối ưu xuất hiện biến không cơ bản có $\Delta j = 0$, có thể tồn tại nhiều nghiệm tối ưu. Khi đó, bài toán toán học cho biết nhiều kế hoạch đều tốt như nhau theo mục tiêu chính.

Về quản trị, đây là cơ hội để đưa thêm tiêu chí phụ vào quyết định: chọn kế hoạch ít rủi ro hơn, dễ triển khai hơn, ít làm thay đổi nhân sự hơn, phù hợp chiến lược marketing hơn hoặc có mức tồn kho an toàn hơn. Như vậy, phương pháp định lượng không thay thế nhà quản lý mà giúp thu hẹp tập phương án tốt để nhà quản lý ra quyết định cuối cùng.

BÀI TẬP VẬN DỤNG BỔ SUNG

Bảng 4.27. Bài tập vận dụng bổ sung của chương 4

Bài tập bổ sung	Yêu cầu
Bài 4.1N - Đồ thị và ý nghĩa quản trị	Tự xây dựng một bài toán hai biến về sản xuất, giải bằng đồ thị, xác định ràng buộc chặt và viết khuyến nghị quản trị.
Bài 4.2N - Chuyển dạng	Cho một bài toán có ràng buộc ≤, ≥, = và một biến tự do; chuyển về dạng chính tắc và chuẩn tắc, chỉ rõ biến phụ, biến dư và biến giả.
Bài 4.3N - Đơn hình Max	Giải một bài toán tối đa hóa bằng bảng đơn hình; giải thích ý nghĩa của từng biến vào và biến ra.
Bài 4.4N - Trường hợp đặc biệt	Tạo hoặc tìm một mô hình có nhiều nghiệm tối ưu, vô nghiệm hoặc không bị chặn; giải thích thông điệp quản trị.
Bài 4.5N - So sánh với Solver	Giải cùng một bài toán bằng đơn hình thủ công và Excel Solver; so sánh kết quả và nêu ý nghĩa của ràng buộc chặt.

KHUNG DIỄN GIẢI KẾT QUẢ QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Khi trình bày kết quả một bài toán quy hoạch tuyến tính, không nên chỉ ghi nghiệm và giá trị hàm mục tiêu. Cần chuyển kết quả toán học thành một thông điệp quản trị rõ ràng. Khung diễn giải dưới đây có thể sử dụng thống nhất cho các ví dụ và bài tập trong Chương 4.

Bảng 4.28. Khung diễn giải kết quả quy hoạch tuyến tính

Bước diễn giải	Nội dung cần nêu	Câu mẫu
1. Nêu nghiệm	Ghi rõ giá trị các biến quyết định.	Doanh nghiệp nên sản xuất 25 đơn vị A và 20 đơn vị B.
2. Nêu giá trị tối ưu	Ghi giá trị lợi nhuận/chi phí/tổng sản lượng tối ưu.	Lợi nhuận tối đa đạt 1.600 đơn vị tiền tệ.
3. Kiểm tra khả thi	Xác nhận nghiệm thỏa toàn bộ ràng buộc.	Phương án không vượt quá nguyên liệu, thời gian và công suất.
4. Đọc ràng buộc chặt	Xác định ràng buộc có số dư bằng 0.	Nguyên liệu và thời gian là hai nguồn lực nút thắt.
5. Đọc số dư	Xác định nguồn lực còn thừa.	Công suất máy còn dư 10 đơn vị, chưa phải nút thắt.
6. Khuyến nghị	Chuyển nghiệm thành quyết định hoặc gợi ý quản trị.	Muốn tăng lợi nhuận, nên xem xét tăng nguyên liệu hoặc thời gian gia công trước khi đầu tư máy móc.

Thông điệp kết luận cần nhấn mạnh khi giảng Chương 4
Quy hoạch tuyến tính là công cụ hỗ trợ ra quyết định trong điều kiện nguồn lực hữu hạn. Giá trị của phương pháp không chỉ nằm ở việc tìm ra một con số tối ưu, mà còn nằm ở khả năng chỉ ra ràng buộc nào đang giới hạn hệ thống, nguồn lực nào còn dư, và mô hình có đang phản ánh đúng thực tế hay không. Vì vậy, mọi kết quả tối ưu đều cần được đọc cùng bối cảnh quản trị, giả định mô hình và chất lượng dữ liệu đầu vào.

TÀI LIỆU THAM KHẢO GỢI Ý

Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., Camm, J. D., Cochran, J. J., Fry, M. J., & Ohlmann, J. W. (2019). *An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making* (15th ed.). Cengage Learning.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2021). Introduction to Operations Research (11th ed.). McGraw-Hill.

Winston, W. L. (2004). Operations Research: Applications and Algorithms (4th ed.). Cengage Learning.